

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ»**

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2016-2018

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ‘ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΩΝ ΑΝΑΠΛΗΡΩΣΗΣ ΣΤΟΧΕΥΜΕΝΟΥ
ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΣ (ORDER-UP-TO LEVEL)’ ΣΕ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΕΣ
ΑΛΥΣΙΔΕΣ ΜΕ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΗ ΖΗΤΗΣΗ**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

Κεβόρκ Σ. Ηλίας

ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ:

Οικονόμου Μ. Αχιλλεύς

Βόλος

Ιούνιος 2019

Υπεύθυνη Δήλωση

Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην διπλωματική εργασία. Επίσης, έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών και λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η πτυχιακή προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά, ειδικά για τις απαιτήσεις του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών στην Εφαρμοσμένη Οικονομική του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Οικονόμου Μ. Αχιλλεύς

Βόλος, Ιούνιος 2019

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέπον καθηγητή μου Ηλία Κεβόρκ, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Χωρίς τις πολύτιμες γνώσεις και καθοδήγησή του, η ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας θα ήταν αδύνατη. Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους γονείς μου, οι οποίοι όλα αυτά τα χρόνια μου συμπαραστέκονται ηθικά ώστε να επεκτείνω τις γνώσεις μου. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στα κοντινά μου άτομα για την απέραντη υποστήριξη που έχω λάβει από τους ίδιους.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται μία ειδική περίπτωση του συστήματος περιοδικής επιθεώρησης του αποθέματος, η πολιτική 'Order-up-to level', για ένα προϊόν και για μία εφοδιαστική αλυσίδα αποτελούμενη από ένα λιανοπωλητή και ένα προμηθευτή. Η ζήτηση που καλούνται να ικανοποιήσουν τα μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας ακολουθεί μία μη στάσιμη διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα, θεωρείται ότι ο λιανοπωλητής ανταποκρίνεται σε ένα $ARIMA(0,1,1)$ υπόδειγμα ζήτησης και αποδεικνύεται ότι και ο προμηθευτής ικανοποιεί μια τέτοια μορφή ζήτησης. Δύο πιθανές στρατηγικές ενσωματώνονται στην ανάλυση που πραγματοποιείται. Η πρώτη αναφέρεται στην περίπτωση της ανταλλαγής πληροφορήσης, σχετικά με δεδομένα τελικής ζήτησης (Information Sharing – IS) και η δεύτερη στην αδυναμία ροής πληροφοριών δεδομένων ζήτησης (No Information Sharing - NIS) από τα κατώτερα μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας στα ανώτερα. Να τονισθεί ότι στην περίπτωση NIS, ο προμηθευτής γνωρίζει μόνο την οικονομετρική μορφή του υποδείγματος ζήτησης που καλείται να ικανοποιεί ο λιανοπωλητής. Επιπλέον, εξετάζεται η αύξηση της μεταβλητότητας της ζήτησης καθώς προχωράμε στα ανώτερα μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας, το λεγόμενο φαινόμενο 'Bullwhip Effect', για τα σενάρια αυτά. Η προσέγγιση του προβλήματος πραγματοποιείται μέσω προσομοιώσεων και τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι η ακρίβεια της πρόβλεψης εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος, το οποίο έχει στη διάθεσή του ο προμηθευτής και αυτομάτως, καθορίζεται η στρατηγική της ανταλλαγής πληροφορήσης έναντι αυτής.

Λέξεις Κλειδιά : Εφοδιαστική Αλυσίδα, Order-Up-To Level Πολιτική Αποθεματοποίησης, Μη Στάσιμη Διαδικασία Ζήτησης, $ARIMA (0,1,1)$ Οικονομετρικό Υπόδειγμα Ζήτησης, Ανταλλαγή Πληροφοριών, Πρόβλεψη.

Abstract

This diploma thesis investigates a special case of the inventory system; the Order-up-to level policy, for one product and a supply chain consisting of a retailer and a supplier. The demand, which the supply chain members need to satisfy, follows a nonstationary process. In particular, it is assumed that the retailer responds to an ARIMA(0,1,1) demand pattern and it is turned out that the supplier satisfies such a form of demand, too. Two possible strategies are incorporated into the analysis that is being carried out. The first one refers to the case of information sharing (IS) regarding the final demand data and the second one refers to the weakness of flow of information demand data from the downstream members of supply chain to the upstream members of the specific supply chain. It is underlined that in the case of NIS, the supplier is only aware of the econometric form of the retailer's demand model. In addition, an increase in demand variability as we proceed through a supply chain, away from the consumers and toward the supplier (upstream member); bullwhip effect, for these scenarios is examined. We approach the problem by means of simulations and the results indicate that the forecast accuracy depends on the magnitude of retailer's demand data, which are available to the supplier and in this way one can choose the optimal strategy.

Keywords : Supply Chain; Order-Up-To Level Inventory Policy; Nonstationary Demand Process; ARIMA (0,1,1) Econometric Demand Process; Information Sharing, Forecasting.

Περιεχόμενα

Περίληψη	4-5
Εισαγωγή	8-10
1. Διαχείριση Εφοδιαστικής Αλυσίδας	
1.1. Ετυμολογία της Εφοδιαστικής Αλυσίδας	11-13
1.2. Ανάπτυξη και Εξέλιξη της Εφοδιαστικής Αλυσίδας	13-16
1.3. Σημαντικότητα της Εφοδιαστικής Αλυσίδας	16-17
1.4. Βασικές Λειτουργίες της Εφοδιαστικής Αλυσίδας	17-18
2. Διαχείριση Αποθεμάτων	
2.1. Ορολογία της Διαχείρισης Αποθεμάτων	19-20
2.2. Αρθρογραφικό και Βιβλιογραφικό Υπόβαθρο της Διαχείρισης Αποθεμάτων.....	20-26
2.3. Κατηγοριοποίηση των Μοντέλων Διαχείρισης Αποθεμάτων και Ζήτησης	26-27
2.4. Τρία θεμελιώδη Ζητήματα ενός Συστήματος Επιθεώρησης Υπό την Υπόθεση της Στοχαστικής Ζήτησης	28-29
2.5. Συνεχής Έλεγχος της Θέσης του Αποθέματος Έναντι Περιοδικού	29-30
2.6. Υπόδειγμα Περιοδικού Ελέγχου, Order-up-to level Πολιτική Αποθεματοποίησης	30-33
2.7. Ανταλλαγή Πληροφοριών (Information Sharing – IS) σε Εφοδιαστικές Αλυσίδες Δύο Σταδίων	33-35
2.8. Το φαινόμενο Bullwhip (Bullwhip Effect)	35-37
3. Πρόβλεψη.....	38-39
3.1. Η Προσέγγιση των Box – Jenkins	39
4. Υποθέσεις Συστήματος και Αναλύσεις	40-42
4.1. Απόφαση Παραγγελίας του Λιανοπωλητή	42-44
4.2. Απόφαση Παραγγελίας του Προμηθευτή	45
4.3. Το Σενάριο της Ανταλλαγής Πληροφόρησης (Information Sharing – IS) ...	46-49
4.4. Το Σενάριο της Μη Ανταλλαγής Πληροφόρησης (No Information Sharing – NIS)	49
4.4.1. Αριθμητική Ανάλυση και Έρευνα	49-50

4.4.2. Εκτίμηση και Ανάλυση των Παραμέτρων γ, θ	51-53
4.4.3. Έλεγχος Διαπιστώσεως της Κανονικότητας Jarque - Bera των Εκτιμημένων Παραμέτρων	54
4.4.3.1. Έλεγχος κανονικότητας του $\hat{\gamma}$ για $n=50$	55-56
4.4.3.2. Έλεγχος κανονικότητας του $\hat{\gamma}$ για $n=100$	56-57
4.4.3.3. Έλεγχος κανονικότητας του $\hat{\gamma}$ για $n=200$	58-59
4.4.3.4. Έλεγχος κανονικότητας του $\hat{\theta}$ για $n=50$	60-61
4.4.3.5. Έλεγχος κανονικότητας του $\hat{\theta}$ για $n=100$	61-62
4.4.3.6. Έλεγχος κανονικότητας του $\hat{\theta}$ για $n=200$	62-63
4.4.4. Ποσοτικοποίηση του Φαινομένου Bullwhip (Bullwhip Effect).....	63-64
4.4.4.1. Υπολογισμός του BW για $n=50$	64-65
4.4.4.2. Υπολογισμός του BW για $n=100$	65
4.4.4.3. Υπολογισμός του BW για $n=200$	66
5. Συμπεράσματα και Περαιτέρω Έρευνα	67-70
Βιβλιογραφία	71-77
Παράρτημα	78-102

Εισαγωγή

Από τα μέσα του 1980, οι στρατηγικές ωφέλειες της διαχείρισης αποθεμάτων και του σχεδιασμού και προγραμματισμού της παραγωγής έγιναν εμφανείς. Η επιχειρησιακή κοινότητα συνεχώς αναφέρονταν στα θαυμαστά επιτεύγματα των Ιαπωνικών, Ευρωπαϊκών και Αμερικανικών εταιριών, οι οποίες κατόρθωσαν υψηλά ποσοστά αποτελεσματικότητας και αποδοτικότητας στον τομέα της διανομής και παραγωγής. Κυριότερο συστατικό της επιτυχίας θεωρείται η προσπάθεια επανασχεδιασμού για τη βελτίωση της αποτελεσματικότητας της εφοδιαστικής αλυσίδας. Στόχος πολλών προγραμμάτων αποτέλεσε το καλύτερο ταίριασμα μεταξύ προσφοράς και ζήτησης, έτσι ώστε να μειωθούν τα κόστη αποθεματοποίησης και έλλειψης. Οι πιθανές αποταμιεύσεις από αυτές τις προσπάθειες, αποτυπώνονται στις τιμές που λαμβάνει η βιομηχανία τροφίμων, \$14 δισεκατομμύρια, (Troyer, 1996) και τα είδη παντοπωλείου, \$30 δισεκατομμύρια, (Kurt Salmon Associates, 1993).

Μία βασική πρωτοβουλία την οποία καλούνται να λάβουν τα μέλη μίας εφοδιαστικής αλυσίδας είναι η συνεργασία μεταξύ αυτών, η οποία επιτρέπει να πραγματοποιείται ανταλλαγή πληροφοριών όσον αφορά τη ζήτηση που παρατηρείται από πλευράς καταναλωτών στα σημεία πώλησης. Τα τελευταία χρόνια η ερευνητική προσπάθεια στον τομέα αυτό έχει επικεντρωθεί στην ποσοτικοποίηση της αξίας που μπορεί να έχει μία τέτοια πληροφορία, κυρίως μέσω του bullwhip effect, αλλά και στους παράγοντες που μπορεί να επηρεάσουν τα οφέλη της ανταλλαγής πληροφοριών.

Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει ικανοποιητικός αριθμός ερευνητικών εργασιών (πχ. βλ. Lee et al., 2000) που αποδεικνύει ότι σε ένα περιβάλλον γνωστοποίησης των τελικών πωλήσεων, το φαινόμενο διαστρέβλωσης της ζήτησης (bullwhip effect), καθώς κάποιος κινείται από τα κατώτερα στάδια της εφοδιαστικής αλυσίδας στα ανώτερα, μειώνεται σε σημαντικό βαθμό. Αντίθετα, στην περίπτωση όπου η ανταλλαγή πληροφοριών σχετικά με τη ζήτηση του καταναλωτή δεν είναι εφικτή, τα ανώτερα στάδια της εφοδιαστικής αλυσίδας καλούνται να διενεργήσουν μελλοντικές προβλέψεις, υπό το πρίσμα της μείωσης του σφάλματος πρόβλεψης. Μη αξιόπιστες προβλέψεις ζήτησης οδηγούν είτε σε διατήρηση υψηλού μεγέθους αποθεμάτων είτε σε απώλεια καλής πίστης από πλευράς των πελατών, όπου οι τελευταίοι αδυνατούν να έχουν το προϊόν τη στιγμή που το ζητάνε.

Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας, η οποία πραγματεύεται την καλύτερη πιθανή στρατηγική που οφείλουν να ακολουθήσουν τα μέλη μίας εφοδιαστικής αλυσίδας δύο σταδίων,

θεωρείται ότι η τελική ζήτηση ανά χρονική περίοδο διαμορφώνεται σύμφωνα με ένα υπόδειγμα $ARIMA(0,1,1)$. Επιπλέον, το μέγεθος της παραγγελίας που δίνεται από τον λιανοπωλητή στον προμηθευτή και από τον προμηθευτή στον κατασκευαστή διαμορφώνεται σύμφωνα με την πολιτική 'παραγγελιών αναπλήρωσης στοχευμένου επιπέδου αποθέματος (Order-up-to level)', ειδική περίπτωση των συστημάτων περιοδικής επιθεώρησης του αποθέματος.

Στόχος της συγγραφής αυτής της εργασίας είναι η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων πρόβλεψης, τα οποία θα κρίνουν την αναγκαιότητα επιλογής του καταλληλότερου μοντέλου, ανταλλαγής (IS) ή μη πληροφοριών (NIS) των δεδομένων της ζήτησης των καταναλωτών. Για την επίτευξη του στόχου αυτού πραγματοποιείται, επιπλέον, η ποσοτικοποίηση του φαινομένου διαστρέβλωσης του μεγέθους της ζήτησης (BW).

Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια του όρου 'εφοδιαστική αλυσίδα' και εν συνεχεία παρουσιάζεται η ανάπτυξη και η εξέλιξη αυτής με την πάροδο του χρόνου. Επίσης, αναφέρεται η σημαντικότητα της σωστής διαχείρισης μίας εφοδιαστικής αλυσίδας και οι βασικές λειτουργίες της.

Στο δεύτερο κεφάλαιο πραγματοποιείται κατηγοριοποίηση των αποθεμάτων εννοιολογικά και αμέσως μετά εκτίθεται το βιβλιογραφικό και αρθρογραφικό υπόβαθρο της διαχείρισης αποθεμάτων από το 1915. Επιπλέον, λαμβάνει χώρα η κατηγοριοποίηση των μοντέλων ζήτησης και διαχείρισης αποθεμάτων και τίθενται τα τρία θεμελιώδη ζητήματα ενός συστήματος επιθεώρησης υπό την υπόθεση της στοχαστικής ζήτησης. Επιπλέον, γίνεται αναφορά στις διαφορές του συνεχή έναντι του περιοδικού ελέγχου επιθεώρησης, αναλύεται το υπόδειγμα Order-up-to level και τέλος, εξετάζεται αρθρογραφικά το σενάριο της ανταλλαγής πληροφοριών (Information Sharing - IS) και το φαινόμενο bullwhip.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η σημαντικότητα της πρόβλεψης των μελλοντικών τιμών της ζήτησης, η οποία καθορίζει τον σχεδιασμό και τον προγραμματισμό της παραγωγής και διανομής, αλλά και η επαναστατική μέθοδος των Box και Jenkins (1976) στην κατασκευή στοχαστικών υποδειγμάτων μη στάσιμων χρονολογικών σειρών, $ARIMA$.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, το οποίο αποτελεί το κυρίως μέρος της οικονομετρικής ανάλυσης, διενεργούνται όλες οι μαθηματικές αποδείξεις σχετικά με την απόφαση του μεγέθους παραγγελιών που εκτελεί ο λιανοπωλητής, αλλά και αυτές που εκτελεί ο προμηθευτής στα σενάρια IS και NIS, ορίζοντας ταυτόχρονα και τις υποθέσεις του

συστήματος. Επιπλέον, στο τμήμα αυτό πραγματοποιείται η αριθμητική έρευνα και ανάλυση για την εκτίμηση των επιθυμητών παραμέτρων απόρροια των προσομοιώσεων που διενεργούνται. Τέλος, εφαρμόζεται έλεγχος διαπίστωσης της κανονικότητας (Jarque-Bera) του δείγματος των εξεταζόμενων εκτιμημένων παραμέτρων και ποσοτικοποίηση του bullwhip effect.

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας, παρατίθενται αναλυτικά όλα τα συμπεράσματα τα οποία εξήχθησαν από την ανάλυση που προηγήθηκε.

1. Διαχείριση Εφοδιαστικής Αλυσίδας

1.1. Ετυμολογία της Εφοδιαστικής Αλυσίδας

Ετυμολογικά, ο όρος εφοδιαστική αλυσίδα/Logistics έχει προέλευση από τον ελληνικό όρο «λόγος», που σημαίνει λογική, με την έννοια της εκλογίκευσης και με σκοπό την επίτευξη ορισμένων συγκεκριμένων στόχων. Στην περίπτωση της χώρας μας, ο όρος «λογιστική» έχει επικρατήσει σε απόδοση του διεθνούς όρου της επιστήμης του “accounting”, ως σχετικός τομέας της Οικονομικής Επιστήμης, κατά παράφραση του επικρατήσαντος αγγλικού όρου “logistics”, που ανταποκρίνεται στην “εφοδιαστική αλυσίδα”.

Η διαχείριση εφοδιαστικής αλυσίδας έχει εξεταστεί από διάφορους ερευνητές. Με βάση τη σχετικά πρόσφατη εξέλιξη της βιβλιογραφίας, δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι υπήρξε μεγάλη διαφωνία σχετικά με τον ορισμό που θα δίνονταν για τον όρο “διαχείριση εφοδιαστικής αλυσίδας” (αναφέρονται οι πιο σημαντικοί ορισμοί της βιβλιογραφίας).

Οι Ganeshan και Harrison (1995) ορίζουν τη διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας ως ένα δίκτυο εγκαταστάσεων και επιλογών διανομής που εκτελεί τις λειτουργίες της προμήθειας υλικών, τη μετατροπή αυτών των υλικών σε ενδιάμεσα και τελικά προϊόντα και τη διανομή αυτών των τελικών προϊόντων στους πελάτες.

Οι Lee και Corey (1995) δήλωσαν ότι η διαχείριση εφοδιαστικής αλυσίδας αποτελείται από τις δραστηριότητες ενσωμάτωσης που πραγματοποιούνται μεταξύ ενός δικτύου εγκαταστάσεων που προμηθεύουν πρώτες ύλες, τις μετατρέπουν σε ενδιάμεσα αγαθά και έπειτα σε τελικά προϊόντα και παραδίδουν προϊόντα στους πελάτες μέσω συστήματος διανομής.

Ο Christopher (1998) καθόρισε την αλυσίδα εφοδιασμού ως το δίκτυο των οργανώσεων που εμπλέκονται, μέσω των ανώτερων και κατώτερων ζεύξεων, στις διαφορετικές διαδικασίες και δραστηριότητες που παράγουν αξία με τη μορφή προϊόντων και υπηρεσιών στα χέρια του τελικού πελάτη.

Η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι ο “στρατηγικός και συστηματικός συντονισμός των παραδοσιακών επιχειρηματικών λειτουργιών και των τακτικών σε αυτές τις επιχειρηματικές λειτουργίες, εντός μιας συγκεκριμένης επιχείρησης και σε όλες τις επιχειρήσεις σε μια αλυσίδα εφοδιασμού, με σκοπό τη βελτίωση της μακροπρόθεσμης

απόδοσης των μεμονωμένων εταιρειών και της εφοδιαστικής αλυσίδας ως σύνολο”(Mentzer et al., 2001).

Οι Jain et al. (2010) ορίζουν : “η εφοδιαστική αλυσίδα είναι η ροή των διαδικασιών μετακίνησης αγαθών από την παραγγελία των πελατών μέσω του σταδίου των πρώτων υλών, της προσφοράς, της παραγωγής και της διανομής των προϊόντων στον πελάτη. Όλες οι επιχειρήσεις διαθέτουν αλυσίδες εφοδιασμού σε ποικίλους βαθμούς, ανάλογα με το μέγεθος της οργάνωσης και τον τύπο του παραγόμενου προϊόντος. Τα δίκτυα αυτά λαμβάνουν προμήθειες και εξαρτήματα, αλλάζουν αυτά τα υλικά σε τελικά προϊόντα και στη συνέχεια τα διανέμουν στον πελάτη. Η διαχείριση της αλυσίδας γεγονότων σε αυτή τη διαδικασία είναι αυτή που είναι γνωστή ως διαχείριση εφοδιαστικής αλυσίδας. Η αποτελεσματική διαχείριση πρέπει να λαμβάνει υπόψη το συντονισμό όλων των διαφόρων τμημάτων αυτής της αλυσίδας όσο το δυνατόν γρηγορότερα, χωρίς την απώλεια ουδεμίας ποιότητας ή ικανοποίησης του πελάτη, διατηρώντας παράλληλα το κόστος χαμηλό”.

Οι Novak και Simco (1991) τονίζουν ότι η εφοδιαστική αλυσίδα καλύπτει όλες τις ροές αγαθών από τον προμηθευτή μέσω του κατασκευαστή και του διανομέα στον τελικό χρήστη. Επίσης, οι Scot και Westbrook (1991) στην έρευνα τους αναφέρουν την εφοδιαστική αλυσίδα ως μία έννοια που χρησιμοποιείται για να συνδέσει κάθε στοιχείο της διαδικασίας, από τις πρώτες ύλες μέχρι τον τελικό πελάτη.

Οι Towil et al., (1992) αντιλαμβάνονται την εφοδιαστική αλυσίδα ως ένα σύστημα, των οποίων τα συστατικά μέρη περιλαμβάνουν προμηθευτές υλικών, εγκαταστάσεις παραγωγής, υπηρεσίες διανομής, πελάτες που συνδέονται μεταξύ τους μέσω της ροής προς τα εμπρός των υλικών και των πληροφοριών ροής ανάδρασης.

“Η έννοια της αλυσίδας εφοδιασμού αποτελείται από ενεργά διαχειριζόμενα κανάλια προμήθειας και διανομής. Είναι η ομάδα των επιχειρήσεων που προσθέτουν αξία μαζί με τη ροή προϊόντων από τις πρώτες ύλες μέχρι τον τελικό πελάτη” (Cavinota, 1992).

Οι Handfield και Nichols (1999) εισάγουν την έννοια της πληροφορίας στον ορισμό της εφοδιαστικής αλυσίδας. Ορίζουν : “η αλυσίδα εφοδιασμού περιλαμβάνει όλες τις δραστηριότητες που σχετίζονται με τη ροή και τη μετατροπή των αγαθών από το στάδιο της πρώτης ύλης μέχρι τον τελικό χρήστη, καθώς και τις σχετικές ροές πληροφοριών”.

Τέλος, οι Chopra και Meindl (2001), απλοποιούν τον ορισμό της εφοδιαστικής αλυσίδας και την αναφέρουν ως όλα τα αποτελούμενα στάδια, άμεσα και έμμεσα, τα οποία χρησιμοποιούνται για την ικανοποίηση των απαιτήσεων του καταναλωτή.

1.2. Ανάπτυξη και εξέλιξη της Εφοδιαστικής Αλυσίδας

Η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας (supply chain management - SCM) έχει αναλάβει σημαντικό ρόλο στην απόδοση μιας επιχείρησης και έχει προσελκύσει το παγκόσμιο ερευνητικό ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια. Μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας αποκαλύπτει μια σημαντική ώθηση για την θεωρητική και πρακτική πλευρά της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας, συνδυάζοντας και ενημερώνοντας τα χαρακτηριστικά της διαχείρισης αποθεμάτων και της διαχείρισης διανομής. Αυτή η ολοκλήρωση έχει οδηγήσει στην έννοια της διευρυμένης επιχείρησης και η αλυσίδα εφοδιασμού εκδηλώνεται τώρα ως η συνεργατική αλυσίδα εφοδιασμού σε όλα τα ενδοεταιρικά σύνορα για τη μεγιστοποίηση της αξίας σε ολόκληρη την εφοδιαστική αλυσίδα.

Σε ένα εξαιρετικά ανταγωνιστικό περιβάλλον, η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας κρίνεται αναγκαία και απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή και σωστή εξειδίκευση. Οι όλο και αυξανόμενες προσδοκίες του καταναλωτικού κοινού δημιούργησαν αλληπάλληλα προβλήματα εξυπηρέτησης και η αντιμετώπιση τους προκάλεσε τεράστια κόστη.

Μέχρι να προσελκύσει το επιθυμητό ενδιαφέρον ο όρος "εφοδιαστική αλυσίδα" και να συνυπολογιστούν οι τεράστιες ωφέλειες από τη σωστή διαχείρισή της, οι κατασκευαστές ήταν αυτοί οι οποίοι λάμβαναν αποφάσεις σχετικά με το ρυθμό παραγωγής και διανομής των προϊόντων. Σήμερα, αυτός ο ρόλος έχει αλλάξει και τη σκυτάλη παίρνουν οι καταναλωτές, οι οποίοι με τη θέλησή τους να ικανοποιήσουν τις πολλαπλές και αυξανόμενες ανάγκες τους, ζητούν αγαθά και υπηρεσίες, των οποίων τη ζήτηση προσπαθούν με κάθε τρόπο να ικανοποιήσουν οι κατασκευαστές. Το κριτήριο της άμεσης παράδοσης ενός προϊόντος, έχει αναδειχθεί ως η πιο κρίσιμη ευκαιρία για την απόκτηση ανταγωνιστικού πλεονεκτήματος. Οι επιχειρήσεις που θα μάθουν πως να βελτιώνουν τη διαχείριση της εφοδιαστικής τους αλυσίδας θα γίνουν οι νέοι ισχυροί παίκτες στην παγκόσμια αγορά.

Παραδοσιακά, η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας ήταν ένα "χωνευτήρι" διάφορων πτυχών, με επιρροές από τη διαχείριση αποθεμάτων, τη διαχείριση

επιχειρήσεων και τη διαχείριση υλικών και διανομής, το μάρκετινγκ, καθώς και την αγορά και τη τεχνολογία της πληροφορίας (Jain et al., 2010). Στην ιδανική περίπτωση, η φιλοσοφία της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας περιλαμβάνει όλες αυτές τις λειτουργίες για να παράγει μια συνολική στρατηγική εφοδιαστικής αλυσίδας, που τελικά ενισχύει την απόδοση της επιχείρησης (Croom et al., 2000, Wisner και Tan, 2000).

Βιβλιογραφικά, έχουν παρατηρηθεί έξι μεγάλες κινήσεις στην εξέλιξη των μελετών της διαχείρισης εφοδιαστικής αλυσίδας, οι οποίες αναφέρονται σχεδόν περιεκτικά ως ακολούθως (Movahedi et al., 2009).

➤ Creation Era

Ο όρος “Διαχείριση Εφοδιαστικής Αλυσίδας” εισήχθη αρχικά από τον Porter το 1985 ως “Value Chain” μέσω του σημαντικού του βιβλίου 'Competitive Advantage: Creating and Sustaining Superior Performance'. Η αλυσίδα αξίας προσδιορίζει μια σειρά από αλληλένδετες δραστηριότητες κοινές σε ένα ευρύ φάσμα εταιρειών. Η αλυσίδα αποτελείται από μια σειρά δραστηριοτήτων, οι οποίες δημιουργούν και παράγουν αξία. Επιτρέπει στις εταιρείες να εντοπίζουν τη συμπεριφορά τους ως προς το κόστος και τους πιθανούς παράγοντες διαφοροποίησης. Με άλλα λόγια, παρέχει το πλαίσιο για την ανάλυση συγκεκριμένων δραστηριοτήτων, μέσω των οποίων οι εταιρείες μπορούν να αποκτήσουν ανταγωνιστικό πλεονέκτημα.

➤ Integration Era

Στην περίοδο αυτή, η διαχείριση εφοδιαστικής αλυσίδας έχει σηματοδοτηθεί με την ανάπτυξη συστημάτων ηλεκτρονικής ανταλλαγής δεδομένων στη δεκαετία του 1960 και αναπτύχθηκε μέχρι τη δεκαετία του 1990, κατά βάση με την εισαγωγή του «Σχεδιασμού Επιχειρηματικών Πόρων» (ERP: Enterprise Resources Planning). Ο σχεδιασμός επιχειρηματικών πόρων καλύπτει την εγκατάσταση συστήματος ταχείας πληροφόρησης σε πραγματικό χρόνο εντός της επιχείρησης (real-time software) και συμβάλλει στην ποιότητα των λειτουργικών αποφάσεων της επιχείρησης, στα πλαίσια της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Η ολοκλήρωση της εφοδιαστικής αλυσίδας θεμελιώνεται σε τρία στάδια: στο πρώτο στάδιο υπάγονται οι διάφορες επιχειρηματικές λειτουργίες, όπως είναι η διαχείριση των αποθεμάτων, η αποθήκευση, ο έλεγχος υλικών, η παραγωγή κλπ., οι οποίες πλέον προσεγγίζονται με έμφαση στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους. Στο δεύτερο στάδιο, οι εν λόγω λειτουργίες ενσωματώνονται στο πλαίσιο ενός πληροφοριακού συστήματος ERP, ενώ στο

τρίτο στάδιο, επιδιώκεται η κάθετη ολοκλήρωση στην εφοδιαστική αλυσίδα, κοινώς η επέκταση των δραστηριοτήτων της επιχείρησης υπό τον έλεγχό της.

➤ Globalization Era

Η εποχή αυτή χαρακτηρίζεται από το φαινόμενο της Παγκοσμιοποίησης και της εισχώρησης του φαινομένου στις ρίζες της έννοιας της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας. Απόρροια της παγκοσμιοποίησης είναι η ανάπτυξη παγκόσμιων δικτύων συνεργασιών και η επέκταση των αλυσίδων εφοδιασμού πέρα από εθνικά σύνορα σε άλλες χώρες, ακόμη και σε άλλες ηπείρους, η οποία έδωσε τη δυνατότητα αύξησης του ανταγωνιστικού πλεονεκτήματος, δημιουργώντας περισσότερη προστιθέμενη αξία και μειώνοντας το κόστος μέσω της παγκόσμιας προμήθειας.

➤ Specialization Era Phase – One Outsourced Manufacturing and Distribution

Στη δεκαετία του 1990, οι βιομηχανίες άρχισαν να επικεντρώνονται στις βασικές ικανότητές τους, δηλαδή σε τομείς που κατείχαν το συγκριτικό πλεονέκτημα και υιοθέτησαν μοντέλα εξειδίκευσης. Ουσιαστικά, οι εταιρίες ξεκίνησαν να διενεργούν συμφωνίες συνεργασιών και ανάθεσης των μη βασικών τους δραστηριοτήτων σε τρίτους. Η ανάθεση ή η πώληση λειτουργιών σε άλλες επιχειρήσεις σήμανε την αλλαγή στις διαχειριστικές απαιτήσεις και πρακτικές, περιλαμβάνοντας επέκταση του ενδιαφέροντος της διοίκησης πέρα από τα στενά όρια της ατομικής επιχείρησης, σε ένα πλέγμα εταιρικών σχέσεων εντός ολόκληρης της εφοδιαστικής αλυσίδας.

➤ Specialization Era Phase Two – Supply Chain Management as a Service

Η εξειδίκευση στην εφοδιαστική αλυσίδα ξεκίνησε από τις αρχές του 1980 με την έναρξη των χρηματιστηριακών μεταφορών και τη διαχείριση χώρων αποθήκευσης και επεκτάθηκε πέρα από τις μεταφορές και τη διαχείριση αποθεμάτων, σε πτυχές σχεδιασμού, συνεργασίας, εκτέλεσης και διαχείρισης επιδόσεων.

Σε μία απρόβλεπτη και ταυτόχρονα ραγδαία μεταβαλλόμενη αγορά, τα μέλη μιας εφοδιαστικής αλυσίδας οφείλουν υπό καθεστώς αναλυτικής σκέψης και σχεδιασμού, με έμφαση στους αστάθμητους παράγοντες που επηρεάζουν την αποτελεσματικότητα της επιχείρησης, να ενεργούν κατάλληλα, ώστε να διασφαλίζουν οποιαδήποτε στιγμή τη διαθεσιμότητα και βιωσιμότητα αυτής.

➤ Supply Chain Management 2.0 (SCM 2.0)

Η έννοια SCM 2.0 ορίστηκε ως μία τάση χρησιμοποίησης του Παγκόσμιου Ιστού (World Wide Web) με σκοπό την αύξηση της παραγωγικότητας, το διαμερισμό πληροφοριών και τη συνεργασία μεταξύ των χρηστών. Η παγκοσμιοποίηση οδήγησε σε νέες μορφές συνεργασίας, οι οποίες εκτείνονταν πέρα από τα στενά εδαφικά όρια της κάθε επιχείρησης και συνεπώς, η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας ως όφειλε να διεισδύσει περισσότερο σε αυτές τις αλλαγές και να αντιληφθεί την εξέλιξη των μεθόδων, διαδικασιών και εργαλείων που θα αποτελούσαν αντικείμενο διαχείρισης της νέας αυτής εποχής.

1.3. Σημαντικότητα της Εφοδιαστικής Αλυσίδας

Η σημασία της αποτελεσματικής διαχείρισης μιας εφοδιαστικής αλυσίδας εκτείνεται από τον ίδιο τον καταναλωτή μέχρι και τη βελτίωση της ποιότητας ζωής των πολιτών. Πιο συγκεκριμένα, σχετικά με τον καταναλωτή, βελτιώνουν σε τεράστιο βαθμό το επίπεδο εξυπηρέτησής του αφού του παρέχουν το επιθυμητό αγαθό στο σωστό χρόνο παράδοσης, στην αντίστοιχη ποιότητα, στον επιθυμητό τόπο και ταυτόχρονα παρέχουν υποστήριξη μετά την πώληση.

Όσο αναφορά την επιχείρηση, μια εφοδιαστική αλυσίδα μπορεί να επιτύχει σημαντική μείωση των λειτουργικών της εξόδων. Οι έμποροι επιθυμούν αποτελεσματικές εφοδιαστικές αλυσίδες ώστε να μειώσουν τα έξοδα αποθεματοποίησης και να παραδώσουν κατευθείαν το προϊόν στο καταναλωτή, μειώνοντας το κόστος αγοράς. Αντίστοιχα, οι κατασκευαστές εξαρτώνται από τις αλυσίδες εφοδιασμού για την αξιόπιστη παράδοση υλικών στις μονάδες συναρμολόγησης, για την αποφυγή υλικών ελλείψεων που θα είχαν ως αποτέλεσμα την παύση της παραγωγής.

Μια πιθανή βελτίωση της χρηματοοικονομικής θέσης μιας επιχείρησης εξαρτάται άμεσα από την διαχείριση της εφοδιαστικής της αλυσίδας. Συμβάλλει στη μείωση των πάγιων περιουσιακών στοιχείων διότι μειώνουν, με την αποτελεσματική διαχείριση, τη δέσμευση χώρων αποθήκευσης, οχημάτων μεταφοράς και ό,τι άλλο συνεπάγεται αυτό. Επιπλέον, αυξάνει την ταμειακή ροή της επιχείρησης.

Ο ρόλος της εφοδιαστικής αλυσίδας δεν είναι μόνο χρηματοοικονομικός. Μπορεί να δημιουργήθηκε και να αναφέρθηκε πρώτη φορά για ανταγωνιστικούς σκοπούς μεταξύ των






επιχειρήσεων, αλλά ο κοινωνικός της ρόλος δεν μπορεί να παραληφθεί. Η διασφάλιση της ανθρώπινης επιβίωσης εξαρτάται, όσο και αν ακούγεται περίεργο, από τη διαχείριση μιας εφοδιαστικής αλυσίδας. Οι άνθρωποι εξαρτιούνται καθημερινά από αγαθά τα οποία καταναλώνονται για σκοπούς κάλυψης καθημερινών βιοτικών αναγκών, όπως νερό και τρόφιμα. Η απόδοση της εφοδιαστικής αλυσίδας μπορεί να βελτιώσει την υγειονομική περίθαλψη, αλλά και να προστατεύσει από ακραία καιρικά φαινόμενα.





Η άσκηση διαχείρισης σε επίπεδο εφοδιαστικής αλυσίδας μπορεί κάλλιστα να βελτιώσει την ποιότητα ζωής. Οι υψηλές υποδομές των εφοδιαστικών αλυσίδων παρέχουν τη δυνατότητα ανταλλαγής προϊόντων και υπηρεσιών άμεσα και με χαμηλό κόστος. Επιπλέον, οι επαγγελματίες της αλυσίδας εφοδιασμού σχεδιάζουν και λειτουργούν όλες τις αλυσίδες εφοδιασμού σε μια κοινωνία και διαχειρίζονται τις μεταφορές, την αποθήκευση, τη διαχείριση αποθεμάτων, τη συσκευασία και την υλικοτεχνική υποστήριξη. Ως αποτέλεσμα, υπάρχουν πολλές θέσεις εργασίας στον τομέα της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι περισσότεροι επιστήμονες και επαγγελματίες ασχολούνται με τη διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας με απώτερο σκοπό την εκτέλεση όλων των λειτουργιών της με το χαμηλότερο κόστος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, αποτελεί η έρευνα των Lee και Billington (1995) που διεξάγεται στην εταιρία ηλεκτρονικών ειδών Hewlett-Packard (HP) και αναφέρεται στην προσπάθεια αντιμετώπισης αποθεματοποίησης υλικών αξίας δισεκατομμυρίων δολαρίων και παράλληλα στην αντιμετώπιση της δυσαρέσκειας από πλευράς καταναλωτών για την ικανοποίηση των αναγκών της αγοράς.

1.4. Βασικές Λειτουργίες της Εφοδιαστικής Αλυσίδας

Ο Lambert (2004), όπως προσδιορίστηκε από τα μέλη Global Supply Chain Forum του Πανεπιστημίου, The Ohio State University των Η.Π.Α., ορίζει ως βασικές λειτουργίες μία εφοδιαστικής αλυσίδας τις ακόλουθες :

-  Διαχείριση Πελατειακών Σχέσεων
-  Διαχείριση Εξυπηρέτησης Πελατών
-  Διαχείριση Ζήτησης
-  Διαχείριση Παραγγελιών
-  Διαχείριση Αποθεμάτων

-  Διαχείριση Παραγωγής
-  Διαχείριση Προμηθευτών
-  Ανάπτυξη και Εμπορευματοποίηση Προϊόντων
-  Διαχείριση Επιστροφών

και ορίζει την εφοδιαστική αλυσίδα ως την ολοκληρωμένη διαδικασία σχεδιασμού, εφαρμογής και ελέγχου βασικών διαδικασιών που μετατρέπουν τις εισροές από τους προμηθευτές σε προϊόντα και υπηρεσίες που προσθέτουν αξία στους πελάτες.

Καταλήγοντας, για τους ερευνητικούς σκοπούς της παρούσας εργασίας, εξάγεται το συμπέρασμα ότι η διαχείριση αποθεμάτων αποτελεί μία βασική λειτουργία της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας, ώστε να εξασφαλίζονται για την επιχείρηση τα βέλτιστα κερδοφόρα οικονομικά αποτελέσματα. Λεπτομερής αναφορά στη διαχείριση αποθεμάτων πραγματοποιείται στο επόμενο κεφάλαιο.

2. Διαχείριση Αποθεμάτων

2.1. Ορολογία της Διαχείρισης Αποθεμάτων

Όταν η ζήτηση είναι στοχαστική είναι χρήσιμο να κατηγοριοποιηθούν τα αποθέματα εννοιολογικά ως ακολούθως (Silver et al, 1998) :

1. **On hand stock (OH)** : Είναι το απόθεμα το οποίο βρίσκεται φυσικά στο ράφι. Δεν μπορεί να είναι αρνητικό. Αυτή η ποσότητα είναι σημαντική στον προσδιορισμό για την κατανόηση αν μία συγκεκριμένη τιμή ζήτησης των πελατών μπορεί να ικανοποιηθεί άμεσα από το ράφι.
2. **Net stock (NS)** = (On hand stock) – (Backorders) : Αυτή η ποσότητα μπορεί να είναι αρνητική (συγκεκριμένα, αν υπάρχουν Backorders). Χρησιμοποιείται σε κάποιους μαθηματικούς ορισμούς και είναι στοιχείο σημαντικών ορισμών και εννοιών.
3. **Inventory position (IP)** : Η θέση του αποθέματος ορίζεται από τη σχέση
$$\text{Inventory Position} = (\text{On hand stock}) + (\text{On order stock}) - (\text{Backorders}) - (\text{Committed})$$

Το On order stock είναι το απόθεμα, το οποίο έχει παραγγελθεί αλλά δεν έχει ληφθεί ακόμα. Το Committed είναι η ποσότητα του αποθέματος η οποία έχει δεσμευθεί για κάποιους συγκεκριμένους σκοπούς και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί βραχυχρόνια. Όπως θα δούμε, η θέση του αποθέματος είναι η ποσότητα κλειδί στην απόφαση για την αναπλήρωση του αποθέματος.
4. **Safety stock or Buffer (SS)** : Το στοκ ασφαλείας ορίζεται ως η μέση τιμή του καθαρού αποθέματος μόλις πριν την παραλαβή της ποσότητας αναπλήρωσης. Αν υπάρχει σχεδιασμός για έλλειψη αποθέματος μόλις πριν τη λήψη την ποσότητας παραγγελίας, τότε το στοκ ασφαλείας λαμβάνει εκείνη τη στιγμή την τιμή μηδέν. Μία θετική τιμή του στοκ ασφαλείας παρέχει ένα 'μαξιλαράκι' ασφαλείας ενάντια στην μεγαλύτερη κατά μέσο όρο ζήτηση που θα προκύψει στον χρόνο παράδοσης της παραγγελίας. Η αριθμητική τιμή του στοκ ασφαλείας εξαρτάται από το τι θα συμβεί στη ζήτηση όταν υπάρχει έλλειψη αποθέματος.
5. **Cycle Service Level (Επίπεδο Εξυπηρέτησης Κύκλου)** : Η πιθανότητα η συνολική ζήτηση στο χρόνο παράδοσης της παραγγελίας να μην υπερβαίνει το στοχευμένο επίπεδο αποθέματος.

Είναι εξίσου σημαντικό να αναρωτηθεί κανείς τι συμβαίνει στην παραγγελία ενός πελάτη όταν ένα προϊόν είναι προσωρινά μη διαθέσιμο, κάτι το οποίο είναι προφανώς σημαντικό στην διαχείριση των αποθεμάτων. Συνεπώς, υπάρχουν δυο ακραίες περιπτώσεις :

1. **Complete backorders** : Οποιαδήποτε ζήτηση δεν ικανοποιείται, παραμένει σε εκκρεμότητα και ικανοποιείται αμέσως μόλις μία επαρκής ποσότητα αναπλήρωσης του αποθέματος φτάσει. Αυτή η κατάσταση αντιστοιχεί σε μία δεσμευμένη αγορά.
2. **Complete lost sales** : Οποιαδήποτε ζήτηση προκύψει όταν δεν υπάρχει διαθέσιμο απόθεμα χάνεται. Ο καταναλωτής ικανοποιεί τις ανάγκες του σε άλλο σημείο πώλησης. Αυτή η κατάσταση είναι εξαιρετικά συνηθισμένη στην σύνδεση μεταξύ καταναλωτή – λιανοπωλητή.

2.2. Αρθρογραφικό και Βιβλιογραφικό Υπόβαθρο της Διαχείρισης Αποθεμάτων

Από την αρχαιότητα και συγκεκριμένα από τις πρώτες κοινωνίες και οικονομίες στην Αίγυπτο, Μεσοποταμία/Περσία, Κίνα και Κεντρική Αμερική, η ευημερία της ανθρωπότητας εξαρτιόνταν από την ικανότητα της μεταφοράς και αποθήκευσης αγαθών. Με την εφεύρεση της ρόδας και του πλοίου και την ταχεία εξάπλωση αυτών, ο πλούτος των κοινωνιών αυξήθηκε πολλαπλάσια εξαιτίας της αποτελεσματικής παραγωγής, της αποθήκευσης και του εμπορίου μεταξύ των περιοχών. Πασίγνωστα μνημεία, όπως οι πυραμίδες της Αιγύπτου, οι αρχαίοι ναοί αλλά και οι κατοικίες των ανθρώπων στην Ασία και στην Κεντρική και Νότια Αμερική, μαρτυρούν την ικανότητα και την ανάγκη διαχείρισης μεταφοράς και αποθεματοποίησης αγαθών, των αντίστοιχων κοινωνιών και οικονομιών.

Η αξία των μεταφορών και της αποθήκευσης φάνηκε ιδιαίτερα κατά τα Ρωμαϊκά χρόνια όπου η δημιουργία οδικού δικτύου, θαλάσσιου στόλου αλλά και ενός συστήματος ταχυδρομικών αποστολών, έδωσε την δυνατότητα στους διοικούντες να χτίσουν μία από τις πρώτες παγκόσμιες αυτοκρατορίες. Αντιθέτως, με τους Ρωμαίους, τον 15^ο αιώνα η διάλυση του Κινεζικού στόλου επέφερε μία περίοδο μακράς οικονομικής ύφεσης, την ώρα που οι Ευρωπαϊκές χώρες ξεκίνησαν τα πρώτα τους βήματα για υπερπόντια ταξίδια αλλάζοντας τον πολιτικό χάρτη της παγκόσμιας οικονομίας. Βέβαια, αξίζει να τονισθεί ότι πλέον τα τελευταία σαράντα χρόνια οι χώρες της Ασίας διαδραματίζουν εξέχον ρόλο στο παγκόσμιο οικονομικό γίγνεσθαι.

Η ανάπτυξη των μεταφορών και η διαχείριση των αποθεμάτων δεν σταμάτησε μόνο στην βελτίωση της οικονομικής ευημερίας των ανθρώπων. Η προσπάθεια των χωρών για επέκταση εδαφικών συμφερόντων και η τάση της αλλαγής στη διεθνή πολιτική σκακιέρα οδήγησε σε αλληπάλληλους πολέμους. Η διαχείριση και μεταφορά αποθεμάτων, συγκεκριμένα στρατιωτικού υλικού, αποτέλεσε σπουδαίο παράγοντα για την έκβαση αρκετών πολέμων. Ο μεγάλος βαθμός εξάρτησης της διαχείρισης αποθεμάτων και μεταφοράς αυτών επιτάχυνε την ανάπτυξη των αποθεμάτων ως μία αυτόνομη επιστήμη με πολλαπλά οφέλη.

Η ιστορία της μαθηματικής θεωρίας των αποθεμάτων άρχισε να συντελείται από τις αρχές του προηγούμενου αιώνα. Το πιο γνωστό αποτέλεσμα σε ολόκληρο το πεδίο της διαχείρισης αποθεμάτων αποτελεί η εφεύρεση του κλασσικού μοντέλου της οικονομικής ποσότητας της παραγγελίας (EOQ – Economic Order Quantity) σύμφωνα με το οποίο καθορίζεται η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας ώστε να ελαχιστοποιηθεί το άθροισμα του κόστους μεταφοράς και παραγγελίας. Αυτό το απλό μοντέλο έχει πληθώρα πρακτικών εφαρμογών. Ο όρος της βέλτιστης ποσότητας παραγγελίας αναφέρθηκε από τον Harris (1915), αλλά ο υπολογισμός του συχνά πιστώνεται στον Wilson (1934) ο οποίος ανέλυσε εις βάθος το έργο του Harris και εμπορεύθηκε τα αποτελέσματα. Από τότε, τα μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων προσελκύουν όλο και περισσότερους επαγγελματίες και ακαδημαϊκούς που ασχολούνται με τον τομέα της Διοικητικής Επιστήμης και της Επιχειρησιακής Έρευνας.

Ως μία επέκταση του μοντέλου της οικονομικής ποσότητας παραγγελίας (EOQ) χαρακτηρίστηκε το μοντέλο της οικονομικής ποσότητας παραγωγής (EPQ – Economic Production Quantity). Το υπόδειγμα αυτό αναπτύχθηκε από τον Taft (1918) και καθορίζει την ποσότητα παραγγελίας μίας επιχείρησης ή ενός λιανοπωλητή που πρέπει να παραγγελθεί ώστε να μειωθεί το συνολικό κόστος αποθέματος εξισορροπώντας το κόστος διατήρησης του αποθέματος και το μέσο σταθερό κόστος της παραγγελίας.

Μέχρι και τα μέσα του 1951 η βέλτιστη αποθεματική πολιτική βασίστηκε στο απλό οικονομικό μοντέλο, όπου η μελλοντική ζήτηση θεωρούνταν γνωστή και σταθερή, όπως και οι σχετικές ποσότητες που καθόριζαν το μοντέλο αυτό. Οι Arrow et al., (1951) μελέτησαν ντετερμινιστικά υποδείγματα – στατικά και δυναμικά – όπου η ζήτηση είναι μία τυχαία μεταβλητή με γνωστή τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Η μελέτη αυτή τους οδήγησε στην ανάλυση του περίφημου 'Newsvendor Model or Newsboy Model', το οποίο αποτελεί ένα μαθηματικό μοντέλο της Επιχειρησιακής Οργάνωσης και των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών που χρησιμοποιείται για τον καθορισμό του άριστου επιπέδου αποθέματος. Το υπόδειγμα

θεωρήθηκε ως μοντέλο μίας χρονικής περιόδου, με δυνατότητα μόνο μίας παραγγελίας αναπλήρωσης ανά χρονική περίοδο, για την κάλυψη της ζήτησης της ίδιας χρονικής περιόδου. Από την ανάλυση αυτή εισήγαν την έννοια 'critical fractile formula' καθορίζοντας το άριστο απόθεμα και το άριστο σημείο αναπαραγγελίας ανά περίοδο ως συνάρτηση της αντίστροφης αθροιστικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της ζήτησης, του σταθερού κόστους παραγγελίας και του σταθερού κόστους των χαμένων πωλήσεων.

Ιδιαίτερα σημαντική θεωρείται η συμβολή των Dvoretzky et al., (1952a, 1952b) στη θεωρία διαχείρισης αποθεμάτων. Πιο συγκεκριμένα, παρουσίασαν δύο υποδείγματα στοχαστικής διαδικασίας της ζήτησης. Στο πρώτο μέρος του άρθρου η κατανομή πιθανότητας θεωρήθηκε γνωστή, ενώ στο δεύτερο άγνωστη. Το έργο τους παρέχει μία γενική λύση στο πρόβλημα αποθεματοποίησης σε κάθε αντίστοιχη περίπτωση. Επιπλέον, σε αντίθεση με τους Arrow et al., (1951) οι οποίοι έδειξαν ότι η βέλτιστη αποθεματική πολιτική δεν απαιτείται να είναι η (s,S) ακόμα και σε πολύ απλές περιπτώσεις, οι Dvoretzky et al., (1953) μελέτησαν λεπτομερώς, ως συνέχεια αυτών, τις περιπτώσεις που η αποθεματική πολιτική (s,S) είναι βέλτιστη για την απλούστερη και ίσως και τη σημαντικότερη περίπτωση διαχείρισης αποθεμάτων.

Οι Bellman et al., (1955) ανέλυσαν την βέλτιστη αποθεματική πολιτική για ένα πρόβλημα πολλών περιόδων. Υπέθεσαν μία διαδικασία ανεξάρτητης και ισόνομα κατανομημένης ζήτησης σε διαδοχικές περιόδους και γραμμικό κόστος παραγγελιών, παρακράτησης και έλλειψης αποδεικνύοντας ότι το υπόδειγμα base-stock είναι βέλτιστο.

Ο Karr και Geisler (1956) στην προσπάθειά τους να αντιμετωπίσουν ένα πρόβλημα της Πολεμικής Αεροπορίας των Η.Π.Α. εφάρμοσαν την τεχνική της απλής οριακής ανάλυσης και πρότειναν ότι παρόμοιες εφαρμογές μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πολλά προβλήματα διαχείρισης αποθεμάτων. Συγκεκριμένα, χρησιμοποίησαν υποδείγματα στα οποία η ζήτηση για πολλά εναλλακτικά προϊόντα κατά τη διάρκεια μίας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου, μπορεί να εκφραστεί με όρους κατανομής πιθανοτήτων. Δεδομένου ότι η ζήτηση μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο από αυτά τα προϊόντα, με συγκεκριμένο συνολικό κόστος, το πρόβλημα ανάγεται στην σύνθεση των εμπορευμάτων που θα παραγγελθούν ανά πακέτο ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός της ανικανοποίητης ζήτησης (ελλείψεις).

Οι Wagner και Whitin (1958) παρουσίασαν ένα αλγόριθμο που η ζήτηση του προϊόντος μεταβαλλόταν διαχρονικά (χρονικός ορίζοντας προγραμματισμού) και η ζήτηση ήταν γνωστή.

Ουσιαστικά, γενίκευσαν το θεώρημα της οικονομικής ποσότητας παραγγελίας και έλαβαν υπόψη τους το γεγονός ότι η ζήτηση για το προϊόν μεταβάλλονταν. Έτσι, προέκυψε το μοντέλο «dynamic lot-size model». Ο αλγόριθμος προσδιορίζει με ακρίβεια τον άριστο προγραμματισμό παραγγελίας αναπλήρωσης του αποθέματος, ελαχιστοποιώντας το συνολικό κόστος ανανέωσης και παρακράτησης του αποθέματος στον χρονικό ορίζοντα παραγραμματισμού.

Οι Arrow et al., (1958a, 1958b) με την πρωτοποριακή τους δημοσίευση κατάφεραν να σηματοδοτήσουν την έναρξη μίας νέας εποικοδομητικής περιόδου στη μελέτη των στοχαστικών μοντέλων αποθεμάτων με έμφαση στις δομικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν την βέλτιστη αποθεματική πολιτική. Όμως, πολλά από τα μοντέλα εκείνης της περιόδου αποδείχτηκαν εξαιρετικά υπολογιστικά, κάτι το οποίο οδήγησε σε μία σειρά από ευρετικές προσεγγίσεις.

Οι Galliher et al., (1959) στο άρθρο τους μελέτησαν δύο κατηγορίες συστημάτων αποθεματοποίησης με τυχαία, δεσμευμένη ζήτηση, υποθέτοντας συνεχή επιθεώρηση αποθέματος και σταθερή ποσότητα παραγγελίας αναπλήρωσης μεγέθους Q . Εξήγησαν το δόγμα της ποσότητας αναπλήρωσης σύμφωνα με την οποία κάθε φορά που το άθροισμα του on hand stock και του on order stock πέσει κάτω από ένα προκαθορισμένο επίπεδο R παραγγέλνεται ποσότητα ίση με Q . Η πρώτη κατηγορία αναφέρθηκε σε μία στάσιμη διαδικασία όπου η μεταβλητή της ζήτησης ήταν τυχαία και οι χρόνοι παράδοσης της παραγγελίας ήταν σταθεροί. Στην συνέχεια, μελέτησαν την περίπτωση της Poisson κατανομής της ζήτησης με τους χρόνους παράδοσης να κατανέμονται εκθετικά. Συμπεράσματα σχετικά με αναμενόμενα κόστη, με την πιθανότητα έλλειψης αποθέματος κ.α., παρέχονται. Επιπλέον, για την Poisson κατανομή, η σύγκριση των δύο υποδειγμάτων οδήγησε στο συμπέρασμα ότι όταν η ποσότητα αναπλήρωσης της παραγγελίας Q είναι μικρή, η αύξηση της μεταβλητότητας του χρόνου παράδοσης της παραγγελίας προκαλεί πολύ μικρή μεταβολή στο προκαθορισμένο επίπεδο R , ενώ όταν η ποσότητα αναπλήρωσης της παραγγελίας είναι μεγάλη, μία αύξηση της μεταβλητότητας του χρόνου παράδοσης της παραγγελίας απαιτεί μία αύξηση του προκαθορισμένου επιπέδου R για να διατηρηθεί η βέλτιστη λύση.

Ιδιαίτερα σημαντική ήταν η συμβολή του Simpson (1959) στη θεωρία της εφοδιαστικής αλυσίδας και συγκεκριμένα στην θεωρία της κατανομής αποθεμάτων στις διάφορες αποθήκες. Για το σκοπό αυτό θεώρησε ότι η ζήτηση των αγαθών σε κάθε αποθήκη ήταν γνωστή και ουσιαστικά έλυνε το πρόβλημα της διάθεσης των αγαθών με τέτοιο τρόπο

ώστε να ελαχιστοποιούνται ή να βελτιστοποιούνται οι στόχοι της διαχείρισης. Πρότεινε ένα μοντέλο το οποίο ήταν αρκετά απλό και πρακτικό για να χρησιμοποιηθεί για την κατανομή μεγάλων ποσοτήτων στις διάφορες αποθήκες.

Ο Scarf (1959), όπως και οι Dvoretzky et al (1952b), εξέτασαν μία πιο γενική κατάσταση του προβλήματος αποθεματοποίησης στο οποίο η κατανομή της ζήτησης δεν ήταν ακριβώς γνωστή. Εισήγαγε για πρώτη φορά στη θεωρία διαχείρισης των αποθεμάτων, την θεωρία του Bayes, όπου λάμβανε υπόψη του μία εκ των υστέρων κατανομή πιθανότητας της ζήτησης όπου οι παράμετροι της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ήταν άγνωστες, στην προσπάθεια του να συμπεριλάβει την πληροφορία που είχε στη διάθεσή του μέχρι και εκείνη την χρονική στιγμή για την ελαχιστοποίηση των συναρτήσεων κόστους της συνολικής χρονικής περιόδου εξέτασης. Επιπλέον, ο Scarf (1959) εξέτασε ένα δυναμικό πρόβλημα αποθεματοποίησης και απέδειξε ότι εάν το κόστος παρακράτησης του αποθέματος και το κόστος έλλειψης είναι γραμμικά τότε η άριστη αποθεματική πολιτική σε κάθε περίοδο είναι πάντα η (s, S) . Τέλος, ο Scarf (1963) συνοψίζει μερικά από τα αποτελέσματα τα οποία είχαν δημοσιευθεί μέχρι και την τελευταία δεκαετία και περιγράφει τις βασικές αναλυτικές τεχνικές που διέπουν την θεωρία των αποθεμάτων.

Ο Veinott (1965) εισήγαγε την ιδέα της μυωπικής πολιτικής όπου ένα πρόβλημα μίας μεταβλητής μπορεί να επιλυθεί μόνο με την πληροφορία που κατέχεται για την τελευταία περίοδο. Επιπλέον, διαπίστωσε ότι το υπόδειγμα base-stock είναι άριστο όταν η ζήτηση είναι ανεξάρτητη από τον χρόνο και ο χρόνος παράδοσης της παραγγελίας είναι σταθερός. Τέλος, ανέφερε τις υποθέσεις σύμφωνα με τις οποίες η μυωπική πολιτική είναι βέλτιστη όταν συσχετίζεται η ζήτηση.

Μία από τις σημαντικότερες ερευνητικές εργασίες σχετικά με την στατιστική πρόβλεψη της διαχείρισης αποθεμάτων πραγματοποιήθηκε από τον Brown (1959) ο οποίος ανέπτυξε την μέθοδο την απλής εκθετικής εξομάλυνσης και επεκτάσεις αυτής από τον Holt (1957) και Winters (1960). Την δεκαετία του 1970 αναπτύχθηκαν τα μοντέλα ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average Models), τα οποία εκτεταμένα μελετήθηκαν από πολλούς ερευνητές. Ωστόσο, οι θεωρητικές βάσεις αυτών των μοντέλων περιγράφηκαν από τους Box και Jenkins (1970) και αργότερα από τους Box et al., (1994). Βέβαια, ιδιαίτερη είναι και η συμβολή των Box και Muller (1958) με τη διατύπωση μίας μεθόδου δειγματοληψίας ψευδό-τυχαίων αριθμών για τη δημιουργία ζευγαριών ανεξάρτητων, τυπικών, κανονικά κατανομημένων τυχαίων αριθμών με αναμενόμενη τιμή μηδέν και διακύμανση ένα, δεδομένου

μιας πηγής ομοιόμορφα κατανεμημένων τυχαίων αριθμών. Στην ουσία, οι πρώτοι που ανέφεραν ρητά τον μετασχηματισμό των Box-Muller (Box-Muller Transformation) ήταν οι Raymond Paley και Norbert Wiener το 1934.

Οι Silver και Meal (1973) δημοσίευσαν μία νέα μέθοδο αποθεματικής πολιτικής με διαχρονικά μεταβαλλόμενη γνωστή ζήτηση ανά χρονική περίοδο. Η μέθοδος τους ονομάστηκε 'Silver-Meal heuristic method' και βασίζεται στο μέσο συνολικό κόστος ανά χρονική περίοδο για έναν αριθμό, έστω k , χρονικών περιόδων όταν στην αρχή της πρώτης χρονικής περιόδου η διαθέσιμη ποσότητα προϊόντος είναι ίση με τη συνολική ζήτηση των k χρονικών περιόδων. Βάσει αυτής της μεθόδου υπολογίζεται διαχρονικά το μέσο συνολικό κόστος και αποφασίζεται η νέα παραγγελία να είναι διαθέσιμη στην αρχή εκείνης της χρονικής περιόδου όπου το μέσο συνολικό κόστος θα αρχίσει να αυξάνει για πρώτη φορά.

Ο Aggarwal (1974) στο άρθρο του εξετάζει τα μοντέλα που είχαν δημοσιευθεί την τελευταία δεκαετία, παρέχοντας ένα γράφημα, υποδεικνύοντας την ευρεία ταξινόμηση αυτών με βάσει των ομοιοτήτων στις προσεγγίσεις που υιοθετήθηκαν κατά τη συγγραφή τους. Μοντέλα βελτιστοποίησης μεγέθους παρτίδας, μοντέλα που γεφυρώνουν το χάσμα μεταξύ θεωρίας και πράξης, μοντέλα που προσδιορίζουν την βέλτιστη χάραξη πολιτικής, είναι μερικά από τα οποία αναφέρθηκαν στην εργασία του. Το σημαντικότερο, όμως, στοιχείο που τονίσθηκε ήταν η αδυναμία εφαρμογής τους στην πράξη αλλά και οι τρόποι βελτίωσης αυτών.

Ύστερα από την ανάπτυξη των ARIMA υποδειγμάτων όλο και περισσότεροι επιστήμονες άρχισαν να ασχολούνται με τη εφαρμογή τους, στην θεωρία διαχείρισης αποθεμάτων.

Οι Johnson και Thompson (1975) επέκτειναν τα αποτελέσματα του Veinott. Θεώρησαν ένα μοντέλο για ένα προϊόν όπου η ζήτηση ακολουθούσε ένα ARMA υπόδειγμα, με μηδενικό χρόνο παράδοσης της παραγγελίας και όχι παραγγελίες σε εκκρεμότητα. Καθόρισαν έτσι την άριστη μυωπική αποθεματική πολιτική υπό τον όρο ότι υπάρχει ένα ανώτατο και ένα κατώτατο όριο στην τιμή της ζήτησης σε κάθε περίοδο.

Οι Song και Zipkin (1993) παρουσίασαν ένα μη στάσιμο υπόδειγμα ενός προϊόντος και υπέθεσαν ότι η ζήτηση ακολουθεί την κατανομή Poisson, αλλά η τιμή της προερχόταν από μία διαδικασία Markov. Διατύπωσαν έτσι ένα δυναμικό πρόγραμμα για την βέλτιστη αποθεματική πολιτική.

Ο Graves (1999) εξέτασε μία base-stock πολιτική για ένα μόνο προϊόν όπου η διαδικασία της ζήτησης είναι μη στάσιμη. Συγκεκριμένα, θεώρησε ένα IMA(1,1) υπόδειγμα για το οποίο οι εκθετικοί σταθμισμένοι κινητοί μέσοι (exponential-weighted moving average) παρέχουν την άριστη πρόβλεψη (Muth, 1960). Απέδειξε ότι η σχέση μεταξύ χρόνου παράδοσης της παραγγελίας και αποθέματος ασφαλείας διαφέρουν όταν η ζήτηση ακολουθεί μια στάσιμη έναντι μιας μη στάσιμης διαδικασίας. Ουσιαστικά, τόνισε ότι είχε αποδείξει και ο Erkip et al (1990) πως απαιτείται περισσότερο στοκ ασφαλείας όταν η ζήτηση προέρχεται από μία μη στάσιμη διαδικασία. Η διαφορά με τον Song και Zipkin (1993) ήταν ότι ο Graves (1999) πρώτα υπέθεσε μία αποθεματική πολιτική και ύστερα ανέλυσε τη συμπεριφορά για μία τάξη της διαδικασίας της ζήτησης.

Η δημοτικότητα των ARIMA υποδειγμάτων οφείλεται στο γεγονός ότι είναι εύκολα στην χρήση και παρέχουν ευρωστία στην διαχείριση μη γραμμικών διαδικασιών ζήτησης (Silver et al., 2000). Επομένως, εκτός των άλλων, οι Baganha και Cohen (1995), Chen et al (2000a,b), Lee et al (1997a), Goodman(1974), Zhang(2004), Lee et al (1997a,b), Ali et al (2011), Babai et al (2011) και πολλοί άλλοι ήταν που μελέτησαν περιπτώσεις ARIMA υποδειγμάτων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα βιβλία για τη διαχείριση αποθεμάτων άρχισαν να εμφανίζονται στη δεκαετία του 1960. Στα πρώτα παραδείγματα περιλαμβάνονται οι Wagner (1962), Hadley και Whitin (1963), Naddor (1966) και Brown (1967). Επιπλέον, οι Eilon και Lampkin (1968) δημοσίευσαν μια συλλογή περιλήψεων από τα δημοσιευμένα άρθρα της περιόδου 1953-1965.

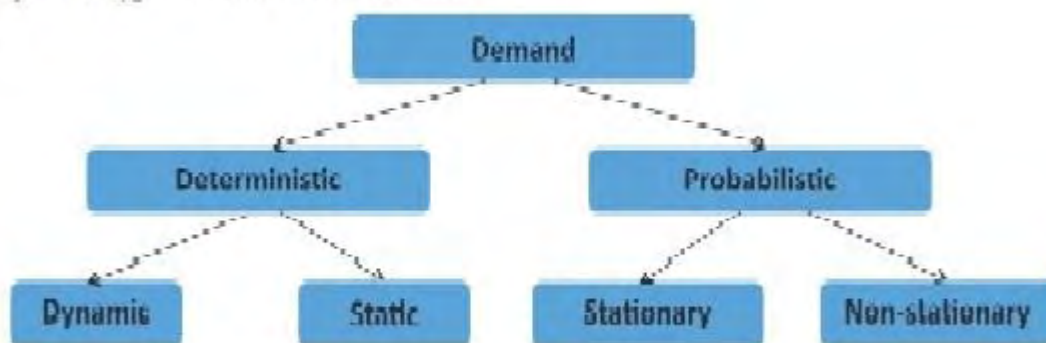
2.3. Κατηγοριοποίησης των Μοντέλων Διαχείρισης Αποθεμάτων και Ζήτησης

Η εκτενής χρήση των μοντέλων αποθεματικής διαχείρισης, όπως ήταν αναμενόμενο, συντέλεσε στην δημιουργία νέων και πολυπληθών υποδειγμάτων. Οι πιο σημαντικές κατηγοριοποιήσεις τους είναι τα μοντέλα που αναφέρονται σε ένα ή πολλά προϊόντα διαχείρισης (single item versus multi-item), ενός κλιμακίου έναντι πολλών κλιμακίων σχετικά με την διαμόρφωση της εφοδιαστικής αλυσίδας (single-echelon versus multi-echelon), ντετερμινιστικά ή στοχαστικά (deterministic versus stochastic), παραγγελίες σε εκκρεμότητα

ή χαμένες πωλήσεις (backorders or lost sales), περιοδική ή συνεχή επιθεώρηση του αποθέματος (periodic vs continuous review) κ.α.

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν σχετικά με την κατηγοριοποίηση της ζήτησης, από την τεράστια έρευνα που πραγματοποιήθηκε στην διαχείριση των αποθεμάτων είναι ότι υπάρχουν πολλές επιλογές στον τρόπο υποδειγματοποίησης, αλλά και των παραμέτρων που εξετάζονται σε κάθε περίπτωση. Ωστόσο, τα είδη της ζήτησης μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα (Silver, 2008).

Figure 1: Types of demand classification



Source: Silver (2008)

Σχήμα 1 : Κατηγοριοποίηση των μοντέλων ζήτησης

Η ντετερμινιστική ζήτηση είναι απόλυτα γνωστή σε αντίθεση με την πιθανολογική – στοχαστική. Κάθε μία από τις δύο αυτές κατηγορίες μπορεί να χωριστεί εξίσου σε δύο υποκατηγορίες. Σύμφωνα με το ντετερμινιστικό μοντέλο έχουν προκύψει δύο είδη: το δυναμικό (χρονικά μεταβαλλόμενη ζήτηση, αλλά με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι γνωστή με βεβαιότητα) και το στατικό (δεν υπόκειται σε καμία μεταβολή και η ποσότητα της ζήτησης είναι γνωστή ή μπορεί να υπολογιστεί με βεβαιότητα).

Σχετικά με το πιθανολογικό μοντέλο ζήτησης, μία κατανομή ζήτησης μπορεί να χαρακτηριστεί ως στάσιμη (γνωστοί παράμετροι, με τη ζήτηση να ακολουθεί μια γνωστή κατανομή πιθανότητας ή να μπορεί να εκτιμηθεί από ιστορικά δεδομένα) ή ως μη στάσιμη (η κατανομή της ζήτησης αποτελεί ένα τυχαίο περίπατο με συχνές αλλαγές στην κατεύθυνση αλλά και στο βαθμό αύξησης και μείωσης).

2.4. Τρία Θεμελιώδη Ζητήματα Ενός Συστήματος Επιθεώρησης Υπό την Υπόθεση της Στοχαστικής Ζήτησης

Ο θεμελιώδης σκοπός ενός συστήματος διαχείρισης αποθεματικής πολιτικής είναι να λύσει τα ακόλουθα τρία προβλήματα :

1. Πόσο συχνά πρέπει να εξετάζεται το επίπεδο αποθέματος
2. Πότε πρέπει να παραγγέλλεται η ποσότητα αναπλήρωσης του αποθέματος
3. Πόσο μεγάλη πρέπει να είναι αυτή η ποσότητα αναπλήρωσης του αποθέματος

Υπό συνθήκες ντετερμινιστικής διαδικασίας της ζήτησης, αυτή παρέχει τη δυνατότητα να γνωρίζουμε εκ των υστέρων ή να μπορούμε να υπολογίσουμε με σιγουριά όλες τις παραμέτρους του συστήματος. Συνεπώς, έχουμε τη δυνατότητα συνεχούς πληροφόρησης σχετικά με τη θέση του αποθέματος. Επιπλέον, αυτόματα απαντάται και η δεύτερη ερώτηση σχετικά με το πότε πρέπει να γίνεται η παραγγελία. Αυτομάτως, αμέσως μόλις η στάθμη του αποθέματος φτάσει μία συγκεκριμένη τιμή, συνήθως το μηδέν, μόνο όταν γίνεται η υπόθεση για μηδενικούς χρόνους παράδοσης της παραγγελίας. Τέλος, συνήθως, η ποσότητα αναπλήρωσης αντιστοιχεί στην οικονομική ποσότητα παραγγελίας ή σε άλλες μεθόδους σχετικά με μεταβαλλόμενη χρονικά γνωστή ζήτηση (Wagner - Whitin, 1958 , Silver - Meal, 1973) κ.α.

Υπό συνθήκες στοχαστικής ζήτησης, οι απαντήσεις είναι πιο δύσκολο να αποκτηθούν. Σχετικά με το πρώτο σημείο, για την συνεχή παρακολούθηση της στάθμης του αποθέματος απαιτούνται οικονομικοί πόροι. Στην περίπτωση αυτή, οφείλεται να καθοριστεί το σύστημα επιθεώρησης του αποθέματος. Όσο πιο μεγάλος είναι ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών επιθεωρήσεων του συστήματος, τόσο πιο μικρός είναι ο κίνδυνος για απρόοπτες μεταβολές της ζήτησης στο χρόνο παράδοσης της παραγγελίας με απώτερο σκοπό την παροχή του επιθυμητού επιπέδου εξυπηρέτησης κύκλου (Service cycle level). Η δεύτερη απάντηση προέρχεται από τον συμψηφισμό μεταξύ του κόστους παραγγελίας, παρακράτησης και του κόστους των χαμένων πωλήσεων. Τέλος, η ποσότητα παραγγελίας συνήθως καθορίζεται από τα εκτελεστικά στελέχη και ποικίλει ανάλογα με το ποια αποθεματική πολιτική θα ακολουθήσουν.

Ο υπεύθυνος διαχείρισης αποθεματικής πολιτικής οφείλει να λάβει υπόψη του αρκετά ζητήματα που καθορίζουν τον τρόπο επιλογής της πολιτικής που θα ακολουθήσει. Εκθέτονται τα περισσότερα σημαντικά :

1. Πόσο σημαντικό είναι το αντικείμενο διαχείρισης
2. Πρέπει ή θα έπρεπε η θέση του αποθέματος να επιθεωρείται περιοδικά ή συνεχώς
3. Ποια μορφή αποθεματικής πολιτικής πρέπει να εφαρμόσει
4. Ποιοι συγκεκριμένοι στόχοι κόστους και εξυπηρέτησης πρέπει να οριστούν

Η επόμενη ενότητα αναφέρεται στην συνεχή και περιοδική επιθεώρηση, αλλά και στο μοντέλο αποθεματικής πολιτικής που εφαρμόζεται.

2.5. Συνεχής Έλεγχος της Θέσης του Αποθέματος Έναντι Περιοδικού

Για τους σκοπούς της εργασίας θα αναφερθούν οι όροι της συνεχής και περιοδικής επιθεώρησης του αποθέματος, πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα αυτών, αλλά και το ένα μοντέλο αποθεματικής πολιτικής, από τα τέσσερα πιο σημαντικά, που θα εφαρμοστεί.

Η απάντηση στο πρόβλημα για το πόσο συχνά πρέπει να πραγματοποιείται επιθεώρηση του αποθέματος, ουσιαστικά αναφέρεται στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών στις οποίες είναι γνωστή η θέση του αποθέματος. Στην βιβλιογραφία συνήθως αναγράφεται ως R .

Η περίπτωση της συνεχούς επιθεώρησης του αποθέματος είναι η κατάσταση στην οποία το στέλεχος γνωρίζει κάθε χρονική στιγμή τη θέση του αποθέματος που διατηρεί. Στην πραγματικότητα, η συνεχής επιθεώρηση δεν απαιτείται, εκτός των περιπτώσεων όπου μεγάλοι όγκοι συναλλαγών πραγματοποιούνται ταυτόχρονα. Εξαιτίας αυτού, το σύστημα μπορεί να καλεστεί και ως σύστημα 'αναφοράς συναλλαγών', όπου ειδικά μηχανήματα στα σημεία πωλήσεων καταγράφουν την ζήτηση που προκύπτει για κάθε ένα προϊόν.

Σε αντίθεση με το υπόδειγμα συνεχής επιθεώρησης, η περιοδική εποπτεία, όπως αναφέρει και το όνομα της, πραγματοποιείται μόνο μετά από κάθε R χρονικά διαστήματα. Μεταξύ των διαδοχικών στιγμών επιθεώρησης το σύστημα χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα και πιθανότητα έλλειψης αποθέματος. Η πιο συνηθισμένη τιμή που λαμβάνει η τιμή του R είναι μία ημέρα.

Η περιοδική επιθεώρηση του αποθέματος είναι προτιμότερη όταν μεγάλες ποσότητες προϊόντων που παραγγέλλονται σχετίζεται μεταξύ τους, με την έννοια ότι αποτελούν αγαθά τα οποία παραγγέλλονται από τον ίδιο προμηθευτή, αποτελούν κομμάτι του ίδιου του εξοπλισμού ή στέλνονται με τον ίδιο μεταφορικό τρόπο. Επιπλέον, μια περιοδική εξέταση του αποθέματος

επιτρέπει στο προσωπικό να αποκτήσει μία λογική πρόβλεψη σχετικά με το μέγεθος των εργασιών που θα πραγματοποιήσει, σε αντίθεση με μία τυχαία απόφαση αποθεματικής αναπλήρωσης που διέπει την συνεχή επιθεώρηση οποιαδήποτε στιγμή.

Ένα άλλο μειονέκτημα της συνεχούς επιθεώρησης αποτελεί το γεγονός ότι γενικά καθίσταται πιο ακριβή σε όρους κόστους επιθεώρησης. Ακόμα και σήμερα ένα σύστημα εγκατάστασης σαρωτών υπόκειται σε υψηλά κόστη εγκατάστασης. Από την άλλη πλευρά, το κυριότερο πλεονέκτημα της συνεχούς επιθεώρησης είναι ότι παρέχει το ίδιο επίπεδο εξυπηρέτησης διατηρώντας ταυτόχρονα λιγότερο στοκ ασφαλείας. Αυτό συμβαίνει διότι μειώνεται το χρονικό διάστημα προστασίας με αποτέλεσμα την μείωση της πιθανότητας να παρουσιαστεί έλλειψη αποθέματος.

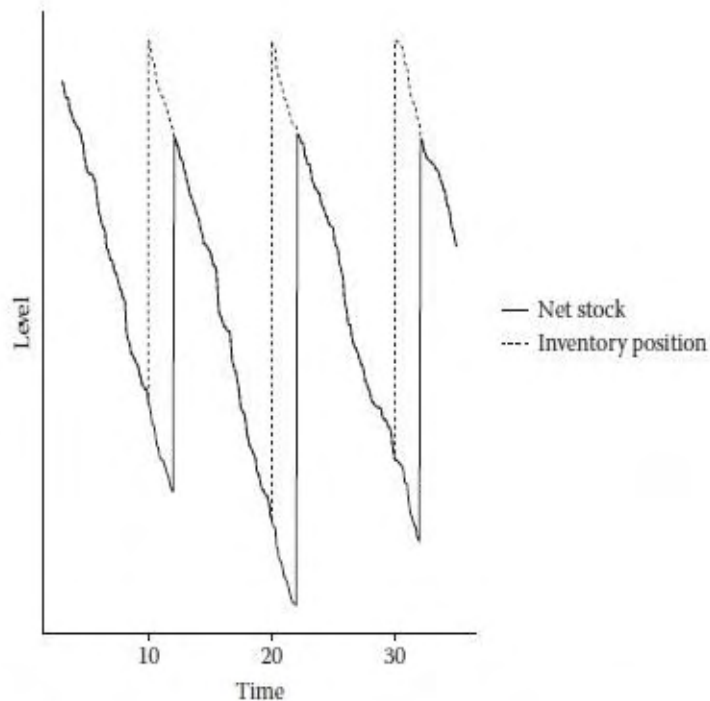
2.6. Υπόδειγμα Περιοδικού Ελέγχου, Order-up-to level (R,S) Πολιτική Αποθεματοποίησης

Το υπόδειγμα που περιγράφεται στο τμήμα αυτό προτάθηκε από τους Charnes et al., (1995) και έκτοτε έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλές ερευνητικές εργασίες επί του θέματος (π.χ. Lee et al., 2000, Ali et al., 2012) στις οποίες και περιγράφονται αναλυτικά οι λόγοι χρησιμοποίησής του.

Υποθέσεις Συστήματος :

1. Η ζήτηση είναι μία τυχαία μεταβλητή.
2. Υπάρχει αμελητέα πιθανότητα να μην προκύψει ζήτηση. Επομένως, μία ποσότητα αναπλήρωσης μεγέθους Q παραγγέλλεται όταν πραγματοποιείται η επιθεώρηση του αποθέματος.
3. Αν δύο η περισσότερες παραγγελίες για το ίδιο προϊόν είναι ταυτόχρονα σε εκκρεμότητα τότε αυτές πρέπει να ληφθούν με την ίδια σειρά που έγινε η παραγγελίας τους.
4. Η τιμή του R υποτίθεται ότι είναι προκαθορισμένη. Στις περισσότερες περιπτώσεις η επίδραση των αποφάσεων για τις τιμές των δύο μεταβλητών, R και S , δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητη αφού η άριστη τιμή του R εξαρτάται από την τιμή του S και αντίστροφα.

Σύμφωνα με αυτή τη μορφή αποθεματικής πολιτικής ο έλεγχος πραγματοποιείται κάθε R χρονικές περιόδους και παραγγέλλεται ποσότητα Q ικανή να αυξήσει τη θέση του αποθέματος στο σημείο επιπέδου S . Ο χρόνος παράδοσης της παραγγελίας L στα περισσότερα υποδείγματα θεωρείται σταθερός. Μία τυπική συμπεριφορά της μορφής αυτού του συστήματος απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα όπου $R = 10$, $L = 2$.



The (R, S) system. Orders placed every 10 periods. Lead time of 2 periods.

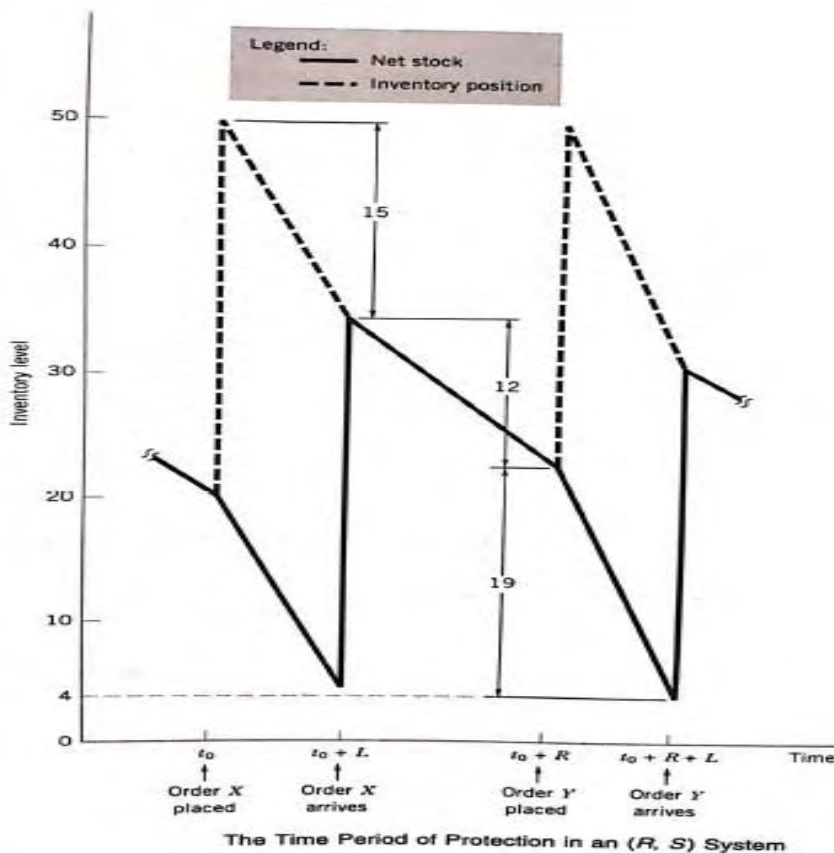
Σχήμα 2 : Order- up-to level Policy, $R = 10$, $L = 2$.

Πηγή: Silver et al (1998)

Για λόγους περαιτέρω κατανόησης του αναγνώστη θα παρουσιαστεί η λεπτομερής εξέταση της λειτουργίας του συστήματος Order-Up-To Level (R, S) , με έστω x, y δύο συνεχόμενες ποσότητες παραγγελιών αναπλήρωσης τις χρονικές στιγμές t_0 και $t_0 + R$, αντίστοιχα.

Η χρονική περίοδος προστασίας στην περίπτωση της περιοδικής επιθεώρησης λαμβάνεται ως η $R + L$. Έστω ότι ορίζεται ως S , το στοχευμένο επίπεδο αποθέματος και ως x, y οι ποσότητες παραγγελίας τις χρονικές στιγμές t_0 και $t_0 + R$, αντίστοιχα και οι οποίες φτάνουν τις χρονικές στιγμές $t_0 + L$ και $t_0 + R + L$. Στην επιλογή του S τη χρονική στιγμή t_0 , λαμβάνουμε υπόψη ότι καμία άλλη παραγγελία εκτός της x δεν μπορεί να ληφθεί πριν τη

χρονική στιγμή $t_0 + R + L$. Επομένως, το στοχευμένο επίπεδο αποθέματος τη χρονική στιγμή t_0 πρέπει να είναι ικανό ώστε να καλύψει τη ζήτηση που θα προκύψει στη διάρκεια της περιόδου $R + L$, δηλαδή ακριβώς πριν την παραλαβή της ποσότητας x . Έλλειψη αποθέματος θα υπάρξει εφόσον η συνολική ζήτηση την χρονική στιγμή $t_0 + R + L$ ξεπεράσει την τιμή του S . Τέλος, οποιαδήποτε έλλειψη αποθέματος προκύψει εντός του χρονικού διαστήματος t_0 έως $t_0 + L$ δεν μπορεί να επηρεάσει την απόφαση του επιπέδου S . Αντίθετα, οποιαδήποτε έλλειψη αποθέματος προκύψει εντός του χρονικού διαστήματος $t_0 + L$ έως $t_0 + R$ θα επηρεάσει την απόφαση σχετικά με τον ορισμό του νέου S .



Σχήμα 3 : Order- up-to level Policy

Πηγή: Silver et al (1998)

Αξίζει να σημειωθεί ότι μία κατάσταση έλλειψης αποθέματος γεννά μια υπερβολική αντίδραση εκ μέρους των στελεχών για εντολή παραγγελιών. Συνέπεια είναι η δημιουργία υπερβολικού αποθέματος όταν οι παραγγελίες παραληφθούν. Αν η επικείμενη έλλειψη αποθέματος είναι εξαιτίας μιας πραγματικής ζήτησης, τότε το κάθε στέλεχος θα πρέπει να ορίσει εκ νέου το σημείο S , αλλιώς θα πρέπει να αρκεστεί σε υπερβολικά αποθέματα.

Λόγω της περιοδικής ιδιότητας του συστήματος, αυτό προτιμάται πολύ περισσότερο από τα συστήματα αναπαραγγελιών σημείου σχετικά με το συντονισμό παραγγελιών σχετιζόμενων προϊόντων. Για παράδειγμα, όταν η παραγγελία πραγματοποιείται από το εξωτερικό είναι απαραίτητο να συμπληρώνονται επαρκείς ποσότητες ώστε να διατηρείται χαμηλό το κόστος αποστολής. Επιπλέον, το σύστημα περιοδικής επιθεώρησης παρέχει τη δυνατότητα στα στελέχη της αναπροσαρμογής του σημείου S ανάλογα με το υπόδειγμα της ζήτησης που ακολουθείται κάθε φορά. Το κυριότερο μειονέκτημά του είναι ότι τα κόστη μεταφορών είναι ιδιαίτερα υψηλά σε σχέση με ένα σύστημα συνεχής επιθεώρησης (Silver et al, 2016).

2.7. Ανταλλαγή Πληροφοριών (Information Sharing - IS) σε Εφοδιαστικές Αλυσίδες Δύο Σταδίων

Ο συντονισμός των αποφάσεων μεταξύ των μελών μίας εφοδιαστικής αλυσίδας είναι καθοριστικής σημασίας για την απόδοση αυτής. Ο συντονισμός των αποφάσεων μπορεί να διευκολυνθεί από κάποια μορφή ανταλλαγής πληροφοριών, η οποία προσφέρεται δια μέσου της ίδιας της εφοδιαστικής αλυσίδας και των μελών της. Ουσιαστικά, αναφέρεται στην περίπτωση όπου κάποιες πληροφορίες, σχετικά με το μέγεθος της ζήτησης, γίνονται διαθέσιμες από ένα κατώτερο μέλος της εφοδιαστικής αλυσίδας (π.χ. λιανοπωλητή), σε ένα ανώτερο (π.χ. προμηθευτή).

Το θέμα της ανταλλαγής πληροφοριών έχει απασχολήσει εκτενώς πολλούς ερευνητές και υπάρχει άφθονη βιβλιογραφία που καλύπτει τις ωφέλειες που μπορεί να αποκομίσει μία εφοδιαστική αλυσίδα, που εφαρμόζει αυτού του είδους τη στρατηγική ποσοτικοποιώντας στην ουσία την αξία της πληροφορίας.

Πρώτοι, οι Bourland et al., (1996) εξέτασαν την περίπτωση στην οποία οι περίοδοι επιθεώρησης του αποθέματος δεν είναι οι ίδιοι σε μία εφοδιαστική αλυσίδα δύο σταδίων, λιανοπωλητή και προμηθευτή. Οι διαφορετικοί χρόνοι έδωσαν τη δυνατότητα στον προμηθευτή να λαμβάνει την ποσότητα παραγγελίας κάνοντας χρήση του επιπέδου αποθέματος του λιανοπωλητή όταν πραγματοποιούνταν ο έλεγχος αποθέματος του δευτέρου (λιανοπωλητή). Όμοια, οι Cachon και Fisher (1997) έδειξαν πώς ο προμηθευτής μπορεί να ωφεληθεί χρησιμοποιώντας το επίπεδο αποθέματος του λιανοπωλητή, όταν ο λιανοπωλητής εφαρμόζει την πολιτική παραγγελιών σε παρτίδες.

Στη συνέχεια, οι Gavirneni et al., (1999) εξέτασαν την περίπτωση όπου ο προμηθευτής είχε περιορισμένη ικανότητα αποθήκευσης και υπέθεσε δύο περιπτώσεις διαμοιρασμού πληροφοριών. Στη πρώτη, λάμβανε πληροφορίες από τον λιανοπωλητή σχετικά με τις παραμέτρους του υποδείγματος της ζήτησης που ακολουθούσε και τις τιμές R, Q της πολιτικής Order-Up-To Level. Στην δεύτερη περίπτωση, αποκτούσε επιπλέον πληροφόρηση αναφορικά με το επίπεδο αποθέματος του λιανοπωλητή από περίοδο σε περίοδο. Χρησιμοποιώντας διάφορες κατανομές της ζήτησης, απέδειξαν ότι η απόκτηση πληροφοριών είναι ωφέλιμη.

Οι ανωτέρω έρευνες που πραγματοποιήθηκαν για την ποσοτικοποίηση και την αξιολόγηση των παρεχόμενων πληροφοριών, υπέθεσαν όλες ότι η ζήτηση αποτελεί μία ανεξάρτητη και ισόνομα κατανεμημένη τυχαία διαδικασία στο χρόνο. Επομένως, η ωφέλεια της ανταλλαγής πληροφοριών βασίζεται στην ικανότητα του προμηθευτή να ανταποκριθεί στις ανάγκες του λιανοπωλητή μέσω της γνώσης του επιπέδου του αποθέματος, ώστε να βοηθήσει να μειωθεί η αβεβαιότητα της ζήτησης που αντιμετωπίζει ο προμηθευτής.

Στη μετά εποχή των iid (ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών) διαδικασιών ζήτησης, πρώτοι οι Lee et al., (2000) διαφοροποίησαν πλήρως τις υποθέσεις τους και εφάρμοσαν μία διαδικασία αυτοσυσχετιζόμενης ζήτησης. Εξέτασαν μία $AR(1)$ διαδικασία ζήτησης και αξιολόγησαν την αξία της πληροφορίας σε μία εφοδιαστική αλυσίδα δύο σταδίων. Αφού εφάρμοσαν ένα υπόδειγμα αποθεματικής πολιτικής (Order-Up-To Level), βασιζόμενοι σε θεωρητικές αναλύσεις και προσομοιώσεις, σύγκριναν τα κόστη παρακράτησης και αποθεματοποίησης των πολιτικών διαμοιρασμού και μη πληροφοριών, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων παρουσίασαν μία ποσοστιαία μείωση της τάξεως του 42% στο κόστος αποθεματοποίησης, σε σύγκριση με την περίπτωση της αδυναμίας ανταλλαγής πληροφοριών. Η αιτιολόγηση της μείωσης βασίστηκε στο γεγονός ότι με μία αυτοσυσχετιζόμενη διαδικασία ζήτησης, ο προμηθευτής θα επωφεληθεί από την πληροφορία σχετικά με τη ζήτηση που αντιμετωπίζει ο λιανοπωλητής και αυτό θα του δώσει τη δυνατότητα να εξάγει μία πιο ακριβή πρόβλεψη για τις παραγγελίες του λιανοπωλητή. Συνεπώς, όσο πιο μεγάλη συσχέτιση υπάρχει, τόσο πιο αποτελεσματική είναι η παρεχόμενη πληροφορία.

Οι Yu et al., (2002) εξέτασαν ένα $AR(1)$ υπόδειγμα και σύγκριναν τα σενάρια στα οποία βασίστηκαν και οι Lee et al., (2000) χρησιμοποιώντας ένα πρόγραμμα διαχείρισης από τον προμηθευτή (VMI- Vendor Managed Inventory). Το αποτέλεσμα ήταν η μείωση του επιπέδου του αποθέματος με τα ανάλογα κόστη.

Τα άρθρα των Raghunathan (2003) και Cheng και Wu (2005) αποτέλεσαν συνέχεια των εργασιών των Lee et al., (2000) και Yu et al., (2002), τα οποία επέκτειναν την ανάλυση σε ένα πρόβλημα εφοδιαστικής αλυσίδας ενός προμηθευτή και πολλών λιανοπωλητών. Περιεκτικά, όποιες αναλύσεις και συγκρίσεις των υποδειγμάτων πραγματοποιήθηκαν, οδήγησαν στην γενίκευση των αποτελεσμάτων των Lee et al., (2000).

Όπως και οι παραπάνω έρευνες εστίασαν την προσοχή τους σε στρατηγικές ανταλλαγής πληροφοριών και μη, βασικό θέμα της εργασίας αποτελεί η πραγματοποίηση μίας τέτοιας σύγκρισης, αλλά με υπόδειγμα IMA(1,1).

2.8. Το φαινόμενο Bullwhip (Bullwhip Effect)

Πολλές βιομηχανίες είχαν εστιάζει την προσοχή τους σε ενέργειες ανασχηματισμού για τη βελτίωση της αποδοτικότητας της εφοδιαστικής τους αλυσίδας. Οι στόχοι των προγραμμάτων ήταν το καλύτερο ταίριασμα μεταξύ της ζήτησης και της προσφοράς αγαθών εντός της εφοδιαστικής αλυσίδας, με σκοπό την μείωση του κόστους αποθεματοποίησης και του κόστους έλλειψης.

Ερευνητικές μελέτες βασισμένες σε εμπειρικές αποδείξεις (Lee et al., 2000, McCuller&Towill,2002, Wong et al., 2007) και μαθηματική μοντελοποίηση (Chen et al., 2000, Graves, 1999, Kim et al., 2006, Luong&Phien,2007) έδειξαν ότι οι παραγγελίες, οι οποίες πραγματοποιούνται από το ένα μέλος της εφοδιαστικής αλυσίδας, έστω λιανοπωλητή, στο προμηθευτή τείνουν να παρουσιάζουν αυξημένη μεταβλητότητα από τη μεταβλητότητα που αντιμετωπίζουν τα κατώτερα μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας. Αυτή η αύξηση της μεταβλητότητας της ζήτησης, καθώς πραγματοποιείται μετάβαση μέσω της εφοδιαστικής αλυσίδας μακριά από τον καταναλωτή και προς τον προμηθευτή, ονομάζεται Bullwhip αποτέλεσμα (Bullwhip Effect). Πιο συγκεκριμένα, έστω σε μία εφοδιαστική αλυσίδα δύο σταδίων. Ως φαινόμενο Bullwhip ορίζεται η αύξηση της μεταβλητότητας της ζήτησης που αντιμετωπίζει ο προμηθευτής, συγκριτικά με τη μεταβλητότητα της ζήτησης του λιανοπωλητή. Lee et al., (1997a, 1997b) χαρακτηρίζουν αυτό το φαινόμενο ως "demand distortion", το οποίο μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα στους προμηθευτές, όπως υπερβολικά ανακριβείς προβλέψεις ζήτησης, χαμηλή παραγωγικότητα, υπερβολική αποθεματοποίηση και μειωμένο επίπεδο εξυπηρέτησης.

Για πρώτη φορά το φαινόμενο της ενίσχυσης της μεταβλητότητας της ζήτησης, αναφέρθηκε από τον Forrester (1958, 1961) στην προσπάθεια του να μελετήσει δυναμικές εφοδιαστικές αλυσίδες στον βιομηχανικό κλάδο. Ωστόσο, ο όρος "Bullwhip Effect" επινοήθηκε από τους Procter και Camble το 1990. Άλλα πιο πρόσφατα άρθρα συμπεριλαμβανομένου Blanchard (1983), Blinder (1982, 1986), και Kahn (1987) επίσης διαπίστωσαν την ένδειξη της μεταβλητότητας των αποθεμάτων όμοια με το φαινόμενο Bullwhip. Οι Lee et al., (1997a, 1997b) διαπιστώνουν πέντε πιθανές πηγές οι οποίες ίσως οδηγούν σε αποτέλεσμα Bullwhip. Συγκεκριμένα, αναφέρονται στο υπόδειγμα της ζήτησης που υιοθετείται, σε μηδενικούς χρόνους παράδοσης της παραγγελίας, σε παρτίδες παραγγελιών, σε διακυμάνσεις τιμών και σε ενέργειες προώθησης.

Οι Filders et al., (2008) αναφέρουν ότι η επίδραση Bullwhip θεωρείται ως ένα από τα πιο σημαντικά φαινόμενα στο πεδίο της Επιχειρησιακής Έρευνας. Αυτό το συμπέρασμα αντλήθηκε από το γεγονός ότι, από το 2000 και μετά, όλο και περισσότεροι επιστήμονες ασχολήθηκαν με τη μελέτη του φαινομένου αλλά και την ποσοτικοποίηση αυτού, προκειμένου να εξαχθούν πολύτιμα συμπεράσματα σχετικά με τη μεταβλητότητα της ζήτησης που θα ανταποκρίνονται σε μειώσεις κόστους. Οι Michna et al., (2013) στην προσπάθεια τους να μετρήσουν τις συνέπειες που έχει το φαινόμενο Bullwhip το όρισαν ως το λόγο $BW_t = \frac{\text{Var}(q_t^{(R)})/E(q_t^{(R)})}{\text{Var}(d_t)/E(d_t)}$, τη χρονική περίοδο t . Για τιμές του BW_t ίσες ή μικρότερες της μονάδας γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι έχουμε φαινόμενο Anti-Bullwhip, όπως διαπίστωσαν οι Li et al., (2005), σύμφωνα με το οποίο η μεταβλητότητα της ζήτησης των ανώτερων μελών της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι μικρότερη από αυτή που αντιμετωπίζουν τα κατώτερα μέλη της.

Για τη μελέτη των τιμών που λαμβάνει ο λόγος $BW_t = \frac{\text{Var}(q_t^{(R)})/E(q_t^{(R)})}{\text{Var}(d_t)/E(d_t)}$ και της επίδρασης που έχουν οι τιμές αυτές, απαιτείται η εξειδίκευση της στοχαστικής ανάλυσης, που διαμορφώνει τα μεγέθη της ζήτησης του λιανοπωλητή, σε κάθε χρονική περίοδο, παράγοντες που καθορίζουν τη διαχρονική εξέλιξη του συστήματος αποθεμάτων. Μεταξύ διαφορετικών στοχαστικών ανεξάρτητων τα υποδείγματα ARIMA (Graves, 1999, Ali et al., 2011, Zhang, 2004, Lee et al., 2000, Luong και Phien, 2007, Babai et al., 2013) είναι αυτά που κυριαρχούν στις ερευνητικές εργασίες που έχουν δημοσιευθεί σε έγκριτα διεθνή περιοδικά.

Οι Lee et al., (1997a, 1997b) έχουν θεωρήσει ότι η δυνατότητα συνεργασίας εντός της εφοδιαστικής αλυσίδας μεταξύ των μελών της και της ανταλλαγής πληροφορήσης σχετικά με

τις πωλήσεις των αντιστοίχων αγαθών, αποτελεί μία στρατηγική για τη αντιμετώπιση του λεγόμενου Bullwhip αποτελέσματος. Επιτρέποντας στον προμηθευτή να έχει ορατότητα των δεδομένων της ζήτησης, η επιβλαβής αυτή συνέπεια μπορεί να βελτιωθεί. Η πιο διάσημη υλοποίηση της ανταλλαγής πληροφόρησης της ζήτησης, είναι το Wal – Mart's Retail Link program, το οποίο παρέχει μια άμεσα συνδεδεμένη βάση δεδομένων των τιμών της ζήτησης στα σημεία πώλησης. Πράγματι, ο διαμοιρασμός των πληροφοριών από τα κατώτερα μέλη μιας εφοδιαστικής αλυσίδας στα ανώτερα, αποτέλεσε τον ακρογωνιαίο λίθο για την δημιουργία άλλων καινοτομιών στη διαχείριση αποθεμάτων, όπως την ιδέα Quick Response (QR) και Efficient Consumer Response (ECR). Μάλιστα, αρκετές φορές η ανταλλαγή πληροφοριών ενσωματώνεται σε προγράμματα, όπως το Vendor-Managed-Inventory (VMI) αλλά και το Continuous Replenishment Program (CRP). Σημαντικές επιτυχίες αυτών των προγραμμάτων διαχείρισης αποθεματικής πολιτικής έχουν αναφερθεί σε εταιρίες όπως η Barilla SpA (Hammond, 1994).

3. Πρόβλεψη

Το μοντέλο της ζήτησης για ένα συγκεκριμένο προϊόν μπορεί να θεωρηθεί ως μία χρονολογική σειρά ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Ένα διοικητικό στέλεχος προκειμένου να λάβει σωστές αποφάσεις σχετικά με τον σχεδιασμό και τον προγραμματισμό της παραγωγής, απαιτεί την πρόβλεψη της τιμής της ζήτησης των μελλοντικών περιόδων. Ουσιαστικά, η πρόβλεψη είναι μία μορφή πληροφόρησης. Σε καμία περίπτωση δεν μπορεί κάποιος να γνωρίζει με βεβαιότητα τί θα συμβεί στο μέλλον, αλλά το καλύτερο που έχει να κάνει είναι να προβλέψει της αναμενόμενες συνθήκες. Αν η πρόβλεψη που λάβει είναι ακριβής, τότε τα σχέδιά του βασίζονται στην σωστή πληροφόρηση. Αντίθετα, αν λάβει εσφαλμένες προβλέψεις, τότε τα σχέδιά του βασίζονται σε λανθασμένες υποθέσεις και αναπόφευκτα θα λάβει άστοχα αποτελέσματα.

Η διαδικασία της πρόβλεψης είναι εξαιρετικά σημαντική αν αναλογισθεί κανείς ότι ο καταναλωτής δεν έχει τη διάθεση να περιμένει ορισμένο χρονικό διάστημα προκειμένου να λάβει το επιθυμητό προϊόν. Έρευνα που πραγματοποιήθηκε στην εταιρία HP (Hewlett-Packard) έδειξε ότι το 40% των αποθεμάτων ήταν στις αποθήκες της εταιρίας, χωρίς έχει αγορασθεί από τους ενδιαφερομένους και το υπόλοιπο 60% ήταν εξαιτίας της μεταβλητότητας που εμφανίζονταν. Σχετικά με τη μεταβλητότητα, ένα ποσοστό της τάξεως του 2% προέρχονταν εξαιτίας του προμηθευτή και της μεταβλητότητας της παραγωγής, αντίστοιχα, και ένα 96% λόγω της αβεβαιότητας της ζήτησης που εμφάνιζε το προϊόν. Επομένως, τα υψηλά ποσοστά μεταβλητότητας της ζήτησης οδήγησαν τους μελετητές να στραφούν σε απαραίτητες ακριβείς μεθόδους και διαδικασίες πρόβλεψης.

Η πρόβλεψη βασίζεται σε έναν συνδυασμό που προέρχεται από το τί έχει παρατηρηθεί στο παρελθόν για την τιμή της μεταβλητής και στην εμπειριστατωμένη κρίση σχετικά με τα γεγονότα. Η εμπειριστατωμένη κρίση αναφέρεται σε γνώσεις που αφορούν προσχεδιασμένες παραγγελίες μεταξύ εξωτερικών πελατών και προσχεδιασμένη χρήση προϊόντος για σκοπούς συντήρησης. Επιπλέον, περιλαμβάνονται και τυχόν προωθητικές ενέργειες, δράσεις ανταγωνιστών.

Η αξιολόγηση μίας πρόβλεψης αποτελεί το τελευταίο, ουσιαστικά, στάδιο μίας διαδικασίας εκτίμησης παραμέτρων. Τα περισσότερα μέτρα αξιολόγησης της πρόβλεψης αναφέρονται στα σφάλματα πρόβλεψης, που είναι απόρροια της διαφοράς της πραγματικής τιμής της μεταβλητής και της εκτιμημένης. Υπάρχουν τουλάχιστον τρεις σημαντικοί λόγοι για

τους οποίους πρέπει να λαμβάνονται ιδιαίτερα υπόψη τα σφάλματα. Πρώτον, ο καθορισμός του επιπέδου του στοκ ασφαλείας που προσφέρει το προκαθορισμένο επίπεδο εξυπηρέτησης κύκλου εξαρτάται από το μέγεθος των σφαλμάτων πρόβλεψης. Δεύτερον, η στατιστική πρόβλεψη βασίζεται σε ένα μαθηματικό μοντέλο με καθορισμένες τις τιμές των παραμέτρων αυτού. Το μέγεθος, αλλά και η κατεύθυνση των σφαλμάτων πρόβλεψης, θα μπορούσε να υποδείξει πιθανές αλλαγές στις τιμές των παραμέτρων του υποδείγματος, αλλά και στην πιθανή εξ' ολοκλήρου αντικατάσταση του μοντέλου. Τέλος, τα σφάλματα παρέχουν μία αξιολόγηση της γενικής απόδοσης που σχετίζεται με την ακρίβεια στην πρόβλεψη.

3.1. Η Προσέγγιση των Box - Jenkins

Οι Box και Jenkins (1976) είχαν τεράστια επίδραση στον τομέα της στατιστικής πρόβλεψης. Ειδικότερα, αναφέρονται στην κατασκευή στοχαστικών υποδειγμάτων μη στάσιμων χρονολογικών σειρών, ARIMA, η οποία αποτελείται από τρία βασικά βήματα, ταυτοποίηση, εκτίμηση και διαγνωστικός έλεγχος. Ουσιαστικά, πρότειναν μια ευρεία κατηγορία στατιστικών μοντέλων. Εννοιολογικά, τα μοντέλα τους είναι πολύ πιο περίπλοκα σε σχέση με αυτά της απλής παλινδρόμησης και της εκθετικής εξομάλυνσης. Ωστόσο, αυτή η πολυπλοκότητα έδωσε τη δυνατότητα για ακριβέστερες προβλέψεις.

Στην παρούσα εργασία, θα αναφερθεί μία ολοκληρωμένη πρώτη τάξεως στοχαστική διαδικασία ζήτησης, η οποία αποτελεί υπόδειγμα κινητών μέσων, ARIMA(0,1,1) ή IMA(1,1)(Integrated Moving Average Model). Στο υπόδειγμα αυτό, η τρέχουσα τιμή της μεταβλητής γεννάται από ένα σταθμικό μέσο τιμών του διαταρακτικού όρου, που εκτείνονται μέχρι μια παρελθούσα τιμή. Ας σημειωθεί, ότι το συγκεκριμένο υπόδειγμα έχει εξεταστεί σε πολύ λίγες ερευνητικές εργασίες (Graves, 1999. Gilbert, 2005. Babai et al., 2011 κ.α.).

4. Υποθέσεις Συστήματος και Αναλύσεις

Ας υποθέσουμε μία εφοδιαστική αλυσίδα δύο επιπέδων, αποτελούμενη από ένα λιανοπωλητή και ένα προμηθευτή, για τη διαχείριση ενός μόνο προϊόντος (Single Item, Two-Stage Supply Chain). Ο λιανοπωλητής καλείται να ικανοποιήσει την ζήτηση των καταναλωτών, η οποία σε κάθε χρονική περίοδο διαμορφώνεται σύμφωνα με το ARIMA(0,1,1). Ας ορίσουμε ως d_t τη ζήτηση που αντιμετωπίζει ο λιανοπωλητής την χρονική στιγμή t , με μ και $|\theta| < 1$ γνωστές παραμέτρους, όπου

$$d_1 = \mu + \varepsilon_1, \text{ για } t = 1 \text{ και}$$

$$d_t = d_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ για } t = 2, 3, 4, \dots (1)$$

και $\{\varepsilon_t\}$ αποτελεί μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, που αναπαριστούν τυχαία σφάλματα με κάθε $\varepsilon_t \sim N(E(\varepsilon_t) = 0, \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2)$, δηλαδή ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διακύμανση σ_ε^2 .

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα περιοδικής επιθεώρησης του αποθέματος, Order-Up-To Level, σύμφωνα με το οποίο (όπως έχει περιγραφεί λεπτομερώς) σε κάθε σημείο επιθεώρησης, ελέγχεται η ποσότητα του αποθέματος και παραγγέλλεται ποσότητα αναπλήρωσης τέτοια ώστε να καλυφθεί η ζήτηση της τρέχουσας, αλλά και να αναπληρωθεί το στοχευμένο επίπεδο αποθέματος μεταξύ των δύο τελευταίων χρονικών περιόδων. Επίσης, υποθέτουμε ότι οι χρόνοι παράδοσης της παραγγελίας από τον προμηθευτή στον κατασκευαστή και από τον κατασκευαστή στον λιανοπωλητή, είναι σταθεροί και γνωστοί και ορίζονται ως L_S και L_R , αντίστοιχα.

Συγκεκριμένα, ο λιανοπωλητής στο τέλος της χρονικής περιόδου t , $t = 1, 2, 3, \dots$, αφού έχει ικανοποιήσει τη ζήτηση, ελέγχει το επίπεδο του αποθέματός του και θέτει μία παραγγελία μεγέθους $q_t^{(R)}$ στον προμηθευτή του, για να αναπληρώσει το απόθεμά του. Ο λιανοπωλητής θα λάβει την παραγγελία μετά από χρονικό διάστημα $t + L_R$. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς και οποιαδήποτε ζήτηση δεν ικανοποιείται παραμένει σε εκκρεμότητα.

Από την άλλη πλευρά, ο προμηθευτής διαχειρίζεται την παραγγελία του λιανοπωλητή ως ακολούθως. Στο τέλος της χρονικής περιόδου t , ο προμηθευτής λαμβάνει και στέλνει την απαιτούμενη παραγγελία $q_t^{(R)}$ στο λιανοπωλητή, ελέγχει το επίπεδο αποθέματός του και θέτει μία παραγγελία μεγέθους $q_t^{(S)}$ στον κατασκευαστή του, για να αναπληρώσει το απόθεμά του.

Ο προμηθευτής θα λάβει την παραγγελία μετά από χρονικό διάστημα $t + L_S$. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς και οποιαδήποτε ζήτηση δεν ικανοποιείται παραμένει σε εκκρεμότητα.

Για τον προσδιορισμό του στοχευμένου επιπέδου αποθέματος, οριζόμενο με Y_t , θα χρησιμοποιηθεί ο ορισμός που έδωσε ο Silver et al., (2007) όπου,

$$\text{Στοκ Ασφαλείας} = Y_t - \hat{D}_{t|H_t}, \quad (2)$$

δηλαδή το αναμενόμενο διαθέσιμο απόθεμα στο τέλος της χρονικής περιόδου $t + L$, μόλις πριν την παραλαβή της νέας παραγγελίας θα ισούται με την ανωτέρω τιμή. Το στοκ ασφαλείας, μας παρέχει το απαιτούμενο 'μαξιλαράκι ασφαλείας (Cushion ή buffer)' ώστε να μην παρατηρηθεί έλλειψη του αποθέματος στο χρονικό διάστημα παράδοσης της παραγγελίας (L) και το οποίο θα ισούται με την πιθανότητα η . Αυτό διατυπώνεται μαθηματικά :

$$P(\sum_{m=1}^L d_{t+m|H_t} \leq Y_t) = \eta, \quad (3)$$

η οποία ύστερα από αντικατάσταση του στοχευμένου επιπέδου αποθέματος Y_t από την (2) ορίζεται ακολούθως :

$$P(\sum_{m=1}^L d_{t+m|H_t} \leq \text{Στοκ Ασφαλείας} + \hat{D}_{t|H_t}) = \eta \Leftrightarrow$$

$$P(\sum_{m=1}^L d_{t+m|H_t} \leq \text{Στοκ Ασφαλείας} + \sum_{m=1}^L \hat{d}_{t+m|H_t}) = \eta \Leftrightarrow$$

$$P(\sum_{m=1}^L d_{t+m|H_t} - \sum_{m=1}^{L_R} \hat{d}_{t+m|H_t} \leq \text{Στοκ Ασφαλείας}) = \eta \Leftrightarrow$$

$$P(\sum_{m=1}^L e_{t+m|H_t} \leq \text{Στοκ Ασφαλείας}) = \eta$$

Υποθέτοντας ότι η τυχαία μεταβλητή $\sum_{m=1}^{L_R} e_{t+m|H_t}$, ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διακύμανση $V_{t|H_t}$, ($\sim N(0, V_{t|H_t})$), ο μετασχηματισμός της σε τυπική κανονική οδηγεί στον παρακάτω προσδιορισμό του στοκ ασφαλείας :

$$\text{Στοκ Ασφαλείας} = Z_\eta \sqrt{V_{t|H_t}},$$

όπου Z_η είναι η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής υπολογιζόμενη στην πιθανότητα η .

Συνεπώς, το στοχευμένο επίπεδο αποθέματος τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση :

$$Y_t = \hat{D}_{t|H_t} + Z_\eta \sqrt{V_{t|H_t}} = \sum_{m=1}^L \hat{d}_{t+m|H_t} + Z_\eta \sqrt{V_{t|H_t}} \quad (4)$$

Αν η συνολική ζήτηση στο χρόνο παράδοσης της παραγγελίας (L) εμφανιστεί μεγαλύτερη του Y_t , δηλαδή, $\sum_{m=1}^L d_{t+m|H_t} \geq Y_t$ γίνεται η υπόθεση ότι η μη εξυπηρετούμενη ποσότητα ζήτησης τίθεται σε εκκρεμότητα και ικανοποιείται άμεσα με την παραλαβή της επόμενης παραγγελίας.

4.1. Απόφαση Παραγγελίας του Λιανοπωλητή

Ο λιανοπωλητής, όπως έχει προαναφερθεί, ελέγχει το απόθεμά του, σύμφωνα με μία ειδική περίπτωση συστήματος περιοδικής αναθεώρησης της πολιτικής ‘‘παραγγελιών αναπλήρωσης στοχευμένου επιπέδου αποθέματος (Order-up-to level)’’.

Σύμφωνα με την πολιτική που εφαρμόζει ο λιανοπωλητής, στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου t , αφού παρατηρήσει τη ζήτηση d_t , η θέση του αποθέματος συγκρίνεται με το στοχευμένο επίπεδο αποθέματος ($Y_t^{(R)}$) και γίνεται παραγγελία ποσότητας

$$q_t^{(R)} = d_t + (Y_t^{(R)} - Y_{t-1}^{(R)}) \quad (5)$$

Δηλαδή, ο λιανοπωλητής θα παραγγείλει τόσο, όσο χρειάζεται για να αναπληρώσει στο υπάρχον απόθεμα το μέγεθος της ζήτησης της τρέχουσας περιόδου, αλλά και τη μεταβολή που υφίσταται το στοχευμένο επίπεδο αποθέματος, μεταξύ των χρονικών περιόδων t και $t-1$, εξαιτίας της αναπροσαρμογής της πρόβλεψης της συνολικής ζήτησης στο χρόνο παράδοσης της παραγγελίας (L_R).

Χρησιμοποιώντας τον τύπο της d_t , ο οποίος δίνεται από την (1) και βρισκόμενοι στην χρονική περίοδο t με επαναλαμβανόμενες χρονικά αντικαταστάσεις, εκφράζεται το μέγεθος της ζήτησης την περίοδο $t + m$ βάσει της σχέσης :

$$d_{t+m} = d_t + \theta \varepsilon_t + \varepsilon_{t+m} + (1 + \theta) \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_{t-j} \quad (6)$$

Έχοντας διαθέσιμο το σύνολο των στοιχείων $H_t = \{d_t, d_{t-1}, d_{t-2}, \dots\}$, που αφορά το μέγεθος της ζήτησης του προϊόντος τις χρονικές στιγμές $t, t-1, t-2, \dots$ (οπότε διαθέσιμες είναι και οι αντίστοιχες τιμές των σφαλμάτων $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$), η πρόβλεψη ‘‘Ελαχίστου

Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος''(MMSE), η οποία διενεργείται το τέλος της χρονικής περιόδου t και αφορά το μέγεθος της ζήτησης τη χρονική περίοδο $t + m$ δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{d}_{t+m|H_t} = E(d_{t+m|H_t}) = E(d_t + \theta \varepsilon_t + \varepsilon_{t+m} + (1 + \theta) \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_{t-j}) = d_t + \theta \varepsilon_t \quad (7)$$

Στην εξαγωγή της (7), το μέγεθος d_t θεωρείται ως μία σταθερά διότι είναι γνωστό, αφού η πρόβλεψη διενεργείται στο τέλος της t χρονικής περιόδου, οπότε η αναμενόμενη τιμή του είναι το ίδιο μέγεθος, ενώ η διακύμανση του είναι μηδέν. Αντίθετα, τα $\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+2}, \dots, \varepsilon_{t+m}$ αφορούν μεγέθη μελλοντικών περιόδων που δεν έχουν πραγματοποιηθεί και θεωρούνται ως τυχαίες μεταβλητές με αναμενόμενες τιμές μηδέν και διακύμανση σ_ε^2 .

Το σφάλμα πρόβλεψης της παρατήρησης d_{t+m} , αφαιρώντας την (7) από την (6) θα ισούται με :

$$e_{t+m|H_t}^{(R)} = d_{t+m} - \hat{d}_{t+m|H_t} = \varepsilon_{t+m} + (1 + \theta) \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_{t-j} \quad (8)$$

και με αναμενόμενη τιμή

$$E(e_{t+m|H_t}^{(R)}) = E(\varepsilon_{t+m}) + (1 + \theta) \sum_{j=1}^{m-1} E(\varepsilon_{t-j}) = 0$$

Η εξαγωγή της τιμής του στοχευμένου επιπέδου αποθέματος για τον λιανοπωλητή $Y_t^{(R)}$ απαιτεί την πρόβλεψη της συνολικής ζήτησης του προϊόντος που θα εμφανιστεί στο χρόνο παράδοσης της παραγγελίας (L_R), έστω $\hat{D}_{t|H_t} = \sum_{m=1}^{L_R} \hat{d}_{t+m|H_t}$, καθώς και της διακύμανσης του αθροίσματος των σφαλμάτων πρόβλεψης των μεγεθών της ζήτησης, έστω $V_{t|H_t}^{(R)} = \text{Var}(\sum_{m=1}^{L_R} e_{t+m|H_t}^{(R)})$, που θα εμφανιστούν στο χρονικό διάστημα από $t + 1$ έως $t + L_R$, όταν οι προβλέψεις διενεργούνται τη χρονική περίοδο t .

Για το ARIMA(0,1,1) υπόδειγμα, η πρόβλεψη της συνολικής ζήτησης στο L_R θα ισούται με :

$$\hat{D}_{t|H_t} = \sum_{m=1}^{L_R} \hat{d}_{t+m|H_t} = L_R(d_t + \theta \varepsilon_t) \quad (9)$$

και η διακύμανση του αθροίσματος των σφαλμάτων πρόβλεψης των μεγεθών της ζήτησης στο L_R θα ισούται με :

$$V_{t|H_t} = \sigma_\varepsilon^2 \{L_R + L_R(L_R - 1)(1 + \theta) + \frac{L_R(L_R - 1)(2L_R - 1)}{6}(1 + \theta)^2\} \quad (10)$$

Δεδομένου ότι τα στοχευμένα επίπεδα αποθεμάτων τη χρονική στιγμή t και $t - 1$ δίνονται από τον τύπο (4) ως :

$$Y_t^{(R)} = \widehat{D}_{t|H_t} + Z_{\eta(R)} \sqrt{V_{t|H_t}^{(R)}} \quad (11)$$

και

$$Y_{t-1}^{(R)} = \widehat{D}_{t-1|H_t} + Z_{\eta(R)} \sqrt{V_{t-1|H_t}^{(R)}} \quad (12),$$

αντίστοιχα,

στο τέλος αυτών των χρονικών περιόδων, αντικαθιστώντας στην (11) και (12) την (9) και (10) αντίστοιχα, θα ισούνται με :

$$Y_t^{(R)} = \widehat{D}_{t|H_t} + Z_{\eta(R)} \sqrt{V_{t|H_t}^{(R)}} = L_R(d_t + \theta \varepsilon_t) + Z_{\eta(R)} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 \{L_R + L_R(L_R - 1)(1 + \theta) + \frac{L_R(L_R - 1)(2L_R - 1)}{6} (1 + \theta)^2\}} \quad (13)$$

και

$$Y_{t-1}^{(R)} = \widehat{D}_{t-1|H_t} + Z_{\eta(R)} \sqrt{V_{t-1|H_t}^{(R)}} = L_R(d_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1}) + Z_{\eta(R)} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 \{L_R + L_R(L_R - 1)(1 + \theta) + \frac{L_R(L_R - 1)(2L_R - 1)}{6} (1 + \theta)^2\}} \quad (14)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας την (13) και (14) στην (5), το μέγεθος της παραγγελίας του λιανοπωλητή στο τέλος της χρονικής περιόδου t θα ισούται με :

$$q_t^{(R)} = d_t + (Y_t^{(R)} - Y_{t-1}^{(R)}) = d_t + L_R(d_t + \theta \varepsilon_t) - L_R(d_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1}) \quad (15)$$

4.2. Απόφαση Παραγγελίας του Προμηθευτή

Ο προμηθευτής ελέγχει το απόθεμα του σύμφωνα με μία ειδική περίπτωση συστήματος περιοδικής αναθεώρησης της πολιτικής ‘‘παραγγελιών αναπλήρωσης στοχευμένου επιπέδου αποθέματος (Order-up-to level)’’.

Σύμφωνα με την πολιτική που εφαρμόζει ο προμηθευτής, στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου t , αφού παρατηρήσει τη ζήτηση $q_t^{(R)}$, η θέση του αποθέματος συγκρίνεται με το στοχευμένο επίπεδο αποθέματος ($Y_t^{(S)}$) και γίνεται παραγγελία ποσότητας

$$q_t^{(S)} = q_t^{(R)} + (Y_t^{(S)} - Y_{t-1}^{(S)}) \quad (16)$$

Δηλαδή, ο λιανοπωλητής θα παραγγείλει τόσο όσο χρειάζεται για να αναπληρώσει στο υπάρχον απόθεμα το μέγεθος της ζήτησης της τρέχουσας περιόδου, αλλά και τη μεταβολή που υφίσταται το στοχευμένο επίπεδο αποθέματος μεταξύ των χρονικών περιόδων t και $t-1$, εξαιτίας της αναπροσαρμογής της πρόβλεψης της συνολικής ζήτησης στο χρόνο παράδοσης της παραγγελίας (L_R)

Ακολουθώντας αυτή την πολιτική, η διαχρονική εξέλιξη των παραγγελιών του εξαρτάται από το εάν γνωρίζει ή όχι σε κάθε περίοδο τη ζήτηση που αντιμετωπίζει ο λιανοπωλητής. Η απόφαση παραγγελίας του προμηθευτή θα βασίζεται στην προσέγγιση που η εφοδιαστική αλυσίδα έχει υιοθετήσει για τον διαμερισμό της πληροφορίας. Θα θεωρηθούν δύο πιθανές στρατηγικές διαμερισμού πληροφοριών. Η πρώτη στρατηγική αναφέρεται στην υπόθεση του διαμερισμού των πληροφοριών (Information sharing - IS) μεταξύ των μελών της εφοδιαστικής αλυσίδας, σε αντίθεση με τη δεύτερη στρατηγική που δεν επιτρέπει την ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ αυτών (No Information Sharing - NIS), δεδομένου ότι στην παρούσα φάση η εφοδιαστική αλυσίδα αποτελείται από δύο στάδια, έναν προμηθευτή και έναν λιανοπωλητή για την διανομή ενός αγαθού (Single-Item, Two-Stage Supply Chain, Retailer-Manufacturer).

4.3. Το Σενάριο της Ανταλλαγής Πληροφόρησης (Information Sharing - IS)

Σύμφωνα με τη στρατηγική αυτή ο προμηθευτής γνωρίζει ότι η ζήτηση που αντιμετωπίζει ο λιανοπωλητής ακολουθεί ένα $ARIMA(0,1,1)$ υπόδειγμα, με γνωστές τις παραμέτρους μ , θ και την τυπική απόκλιση σ_ε . Αυτή η υπόθεση είναι λογική από τη στιγμή που πληροφορίες σχετικά με το υπόδειγμα της ζήτησης του προϊόντος ανταλλάσσονται μεταξύ του λιανοπωλητή και του προμηθευτή ή ο προμηθευτής εφοδιάζεται με ιστορικές τιμές της ζήτησης, οι οποίες εξασφαλίζουν παραγωγή πληροφόρησης με επαρκής ακρίβεια. Συνεπώς, ο προμηθευτής έχει πλέον διαθέσιμο όλο το σύνολο $H_t = \{d_t, d_{t-1}, d_{t-2}, \dots\}$, που αφορά τα μεγέθη της ζήτησης που καλείται να ικανοποιήσει ο λιανοπωλητής κάθε χρονική περίοδο. Με την ανταλλαγή πληροφόρησης, ο προμηθευτής τώρα γνωρίζει και την ποσότητα παραγγελίας του λιανοπωλητή $q_t^{(R)}$ και τα σφάλματα ε_t (μέσω της ανταλλαγής πληροφοριών σχετικά με τη ζήτηση d_t).

Γενικά, για τον προσδιορισμό του στοχευμένου επιπέδου αποθέματος του προμηθευτή $Y_t^{(S,IS)}$ στην περίπτωση της ανταλλαγής πληροφοριών, ο προμηθευτής χρειάζεται να προβλέψει τη συνολική ζήτηση (ή την ποσότητα παραγγελίας του λιανοπωλητή) στο χρόνο παράδοσης της παραγγελίας L_S . Από τη στιγμή που η ζήτηση του προμηθευτή αντιστοιχεί στην ποσότητα παραγγελίας του λιανοπωλητή, η συνολική ποσότητα αποστολής στο χρόνο παράδοσης της παραγγελίας L_S , οριζόμενη ως $\hat{Q}_t^{(S,IS)}$, είναι ίση με το σύνολο των παραγγελιών του λιανοπωλητή για τις περιόδους $t + 1, \dots, t + L_S$. Ειδικότερα, $\hat{Q}_t^{(S,IS)} = \sum_{m=1}^{L_S} \hat{q}_{t+m}^{(R)}$.

Για την ταυτοποίηση του υποδείγματος της ζήτησης που αντιμετωπίζει η προμηθευτής ($q_t^{(R)}$), ο Graves (1999) έδειξε ότι η διαχρονική εξέλιξη παραγγελιών του προμηθευτή ανταποκρίνεται σε ένα $ARIMA(0,1,1)$, αντίστοιχα όμοιο με το υπόδειγμα της ζήτησης που ικανοποιεί ο λιανοπωλητής. Ειδικότερα, αντικαθιστώντας στην (15), την (1) για t και $t - 1$ εύκολα προκύπτει ότι :

$$q_1^{(R)} = \mu + \xi_1, t = 1 \text{ και}$$

$$q_t^{(R)} = q_{t-1}^{(R)} + \gamma \xi_{t-1} + \xi_t, t = 2, 3, 4, \dots, (17)$$

$$\text{όπου } \gamma = \frac{\theta - L_R(1 + \theta)}{1 + L_R(1 + \theta)}, \xi_t = \{1 + L_R(1 + \theta)\} \varepsilon_t \text{ και } \sigma_\xi^2 = \{1 + L_R(1 + \theta)\}^2 \sigma_\varepsilon^2,$$

με μ και $|\gamma| < 1$ γνωστές παραμέτρους και $\{\xi_t\}$ να αποτελεί μία ακολουθία γνωστών ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που αναπαριστούν τυχαία σφάλματα με κάθε $\xi_t \sim N(E(\xi_t) = 0, \text{Var}(\xi_t) = \sigma_\xi^2)$, δηλαδή ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διακύμανση σ_ξ^2 .

Χρησιμοποιώντας τον τύπο της $q_t^{(R)}$, ο οποίος δίνεται από την (17) και βρισκόμενοι στην χρονική περίοδο t , με επαναλαμβανόμενες χρονικά αντικαταστάσεις εκφράζεται το μέγεθος της ζήτησης του λιανοπωλητή την περίοδο $t + m$, βάσει της σχέσης :

$$q_{t+m}^{(R)} = q_t^{(R)} + \gamma \xi_t + \xi_{t+m} + (1 + \gamma) \sum_{j=1}^{m-1} \xi_{t-j} \quad (18)$$

Έχοντας διαθέσιμο το σύνολο των στοιχείων $O_t = \{q_t^{(R)}, q_{t-1}^{(R)}, q_{t-2}^{(R)}, \dots\}$, που αφορά το μέγεθος της ζήτησης του λιανοπωλητή τις χρονικές στιγμές $t, t-1, t-2, \dots$ στην ειδική περίπτωση ανταλλαγής πληροφοριών μεταξύ των μελών, είναι ιδιαίτερης σημασίας να τονισθεί ότι γνωρίζοντας ο προμηθευτής το σύνολο των στοιχείων $H_t = \{d_t, d_{t-1}, d_{t-2}, \dots\}$, που αφορά το μέγεθος της ζήτησης του προϊόντος, τις χρονικές στιγμές $t, t-1, t-2, \dots$ (οπότε διαθέσιμες είναι και οι αντίστοιχες τιμές των σφαλμάτων $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$), αυτομάτως ο προμηθευτής γνωρίζει και τις αντίστοιχες τιμές των σφαλμάτων $\xi_t, \xi_{t-1}, \xi_{t-2}, \dots$, οι οποίες είναι συνάρτηση των $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$, και η πρόβλεψη "Ελαχίστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος" (MMSE), η οποία διενεργείται το τέλος της χρονικής περιόδου t και αφορά το μέγεθος της ζήτησης τη χρονική περίοδο $t + m$, θα δίνεται από τη σχέση :

$$\hat{q}_{t+m}^{(R)} = E(q_{t+m}^{(R)}) = E(q_t^{(R)} + \gamma \xi_t + \xi_{t+m} + (1 + \gamma) \sum_{j=1}^{m-1} \xi_{t-j}) = q_t^{(R)} + \gamma \xi_t \quad (19)$$

Στην εξαγωγή της (19), το μέγεθος $q_t^{(R)}$ θεωρείται ως μία σταθερά διότι είναι γνωστό, αφού η πρόβλεψη διενεργείται στο τέλος της t χρονικής περιόδου, οπότε η αναμενόμενη τιμή του είναι το ίδιο μέγεθος, ενώ η διακύμανση του είναι μηδέν. Αντίθετα, τα σφάλματα $\xi_{t+1}, \xi_{t+2}, \dots, \xi_{t+m}$ αφορούν μεγέθη μελλοντικών περιόδων που δεν έχουν πραγματοποιηθεί και θεωρούνται ως τυχαίες μεταβλητές με αναμενόμενες τιμές μηδέν και διακύμανση σ_ξ^2 .

Το σφάλμα πρόβλεψης της παρατήρησης $q_{t+m}^{(R)}$, αφαιρώντας την (19) από την (18) θα ισούται με :

$$e_{t+m}^{(S,IS)} = q_{t+m}^{(R)} - \hat{q}_{t+m}^{(R)} = \xi_{t+m} + (1 + \gamma) \sum_{j=1}^{m-1} \xi_{t-j} \quad (20)$$

και με αναμενόμενη τιμή

$$E(e_{t+m}^{(S,IS)}) = E(\xi_{t+m}) + (1 + \gamma) \sum_{j=1}^{m-1} E(\xi_{t-j}) = 0$$

Η εξαγωγή της τιμής του στοχευμένου επιπέδου αποθέματος για τον προμηθευτή $Y_t^{(S,IS)}$, απαιτεί την πρόβλεψη της συνολικής ζήτησης που θα εμφανιστεί στο χρόνο παράδοσης της παραγγελίας (L_S), έστω $\hat{Q}_t^{(S,IS)} = \sum_{m=1}^{L_S} \hat{q}_{t+m}^{(R)}$, καθώς και της διακύμανσης του αθροίσματος των σφαλμάτων πρόβλεψης των μεγεθών της ζήτησης, έστω $V_t^{(S,IS)} = \text{Var}(\sum_{m=1}^{L_S} e_{t+m}^{(S,IS)})$ που θα εμφανιστούν στο χρονικό διάστημα από $t + 1$ έως $t + L_S$, όταν οι προβλέψεις διενεργούνται τη χρονική περίοδο t .

Για το ARIMA(0,1,1) υπόδειγμα, η πρόβλεψη της συνολικής ζήτησης του προμηθευτή στο L_S θα ισούται με :

$$\hat{Q}_t^{(S,IS)} = \sum_{m=1}^{L_S} \hat{q}_{t+m}^{(R)} = L_S(q_t^{(R)} + \gamma \xi_t) \quad (21)$$

και η διακύμανση του αθροίσματος των σφαλμάτων πρόβλεψης των μεγεθών της ζήτησης στο L_S θα ισούται με :

$$V_t^{(S,IS)} = \sigma_\xi^2 \{ L_S + L_S(L_S - 1)(1 + \gamma) + \frac{L_S(L_S - 1)(2L_S - 1)}{6} (1 + \gamma)^2 \} \quad (22)$$

Δεδομένου ότι τα στοχευμένα επίπεδα αποθεμάτων τη χρονική στιγμή t και $t - 1$ δίνονται από τον τύπο (4) ως :

$$Y_t^{(S,IS)} = \hat{Q}_t^{(S,IS)} + Z_{\eta(S)} \sqrt{V_t^{(S,IS)}} \quad (23)$$

και

$$Y_{t-1}^{(S,IS)} = \hat{Q}_{t-1}^{(S,IS)} + Z_{\eta(R)} \sqrt{V_{t-1}^{(S,IS)}} \quad (24),$$

αντίστοιχα,

στο τέλος αυτών των χρονικών περιόδων, αντικαθιστώντας στην (23) και (24) την (21) και (22) αντίστοιχα, θα ισούνται με

$$Y_t^{(S,IS)} = \hat{Q}_t^{(S,IS)} + Z_{\eta(S)} \sqrt{V_t^{(S,IS)}} = L_S(q_t^{(R)} + \gamma \xi_t) + Z_{\eta(S)} \sqrt{\sigma_\xi^2 \{ L_S + L_S(L_S - 1)(1 + \gamma) + \frac{L_S(L_S - 1)(2L_S - 1)}{6} (1 + \gamma)^2 \}} \quad (25)$$

και

$$Y_{t-1}^{(S,IS)} = \widehat{Q}_{t-1}^{(S,IS)} + Z_{\eta(R)} \sqrt{V_{t-1}^{(S,IS)}} = L_S(q_{t-1}^{(R)} + \gamma \xi_{t-1}) + Z_{\eta(S)} \sqrt{\sigma_\xi^2 \{L_S + L_S(L_S - 1)(1 + \gamma) + \frac{L_S(L_S - 1)(2L_S - 1)}{6}(1 + \gamma)^2\}} \quad (26)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας την (25) και (26) στην (16), το μέγεθος της παραγγελίας του προμηθευτή στο τέλος της χρονικής περιόδου t θα ισούται με :

$$q_t^{(S,IS)} = q_t^{(R)} + (Y_t^{(S,IS)} - Y_{t-1}^{(S,IS)}) = q_t^{(R)} + L_S(q_t^{(R)} + \gamma \xi_t) - L_S(q_{t-1}^{(R)} + \gamma \xi_{t-1}) \quad (27)$$

4.4. Το Σενάριο της Μη Ανταλλαγής Πληροφόρησης (No Information Sharing - NIS)

Σύμφωνα με το σενάριο αυτό, ο προμηθευτής έχει μόνο ως διαθέσιμη πληροφορία το σύνολο $O_t = \{q_t^{(R)}, q_{t-1}^{(R)}, q_{t-2}^{(R)}, \dots\}$ των παραγγελιών που έχει κάνει ο λιανοπωλητής έως και τη χρονική περίοδο t . Υπενθυμίζεται ότι το σύνολο O_t δίνει τη διαχρονική εξέλιξη της ζήτησης που αντιμετωπίζει ο προμηθευτής. Συγκεκριμένα, ο προμηθευτής λαμβάνει μόνο πληροφορίες σχετικά με την ποσότητα παραγγελίας του λιανοπωλητή ($q_t^{(R)}$). Σε αυτήν την περίπτωση τονίζεται ιδιαίτερα ότι ο διαταρακτικός όρος ε_t έχει ήδη πραγματοποιηθεί, αλλά δεν είναι γνωστή η τιμή του στο προμηθευτή όταν αυτός καλείται να αποφασίσει για την ποσότητας παραγγελίας του, στον καθορισμό της order-up-to level αποθεματικής πολιτικής, στο τέλος της χρονικής περιόδου t .

4.4.1. Αριθμητική Ανάλυση και Έρευνα

Για τους σκοπούς της αριθμητικής έρευνας, θεωρείται ένα υπόδειγμα ζήτησης IMA(1,1) για τον λιανοπωλητή με $\sigma_\varepsilon^2 = 16$. Με σκοπό να εξετασθεί η επίδραση της σταθεράς εξομάλυνσης θ στα αποτελέσματα, η θ θα διαφοροποιείται και θα λαμβάνει τις τιμές ($\theta = -0.2, -0.5, -0.8, 0.2, 0.5, 0.8$). Ο διαταρακτικός όρος της ζήτησης (ε_t) υπολογίζεται με βάση την παραγωγή τυποποιημένων κανονικών μεταβλητών, που βασίζονται στους Box και Miller (1958). Η ζήτηση παράγεται σύμφωνα με την εξίσωση (1). Ο χρόνος παράδοσης της παραγγελίας θα λαμβάνει την τιμή $L_R = 1$.

Αφού πραγματοποιηθεί η παραγωγή των τυποποιημένων κανονικών μεταβλητών (ε_t), παρέχεται, αυτομάτως, η δυνατότητα υπολογισμού των αντίστοιχων τιμών των σφαλμάτων ξ_t , οι οποίες είναι συνάρτηση των ε_t , από τη σχέση $\xi_t = \{1 + L_R(1 + \theta)\}\varepsilon_t$. Εν συνεχεία, όπως ορίζεται από την σχέση (17), έχοντας διαθέσιμες τις τιμές των σφαλμάτων ξ_t αλλά και τις τιμές της ζήτησης που αντιμετωπίζει ο προμηθευτής, $O_t = \{q_t^{(R)}, q_{t-1}^{(R)}, q_{t-2}^{(R)}, \dots\}$ μέχρι τη χρονική στιγμή t αντίστοιχα, υπολογίζεται με τη βοήθεια του στατιστικού πακέτου EViews 10 η εκτίμηση της παραμέτρου γ . Να σημειωθεί ότι επειδή η σχέση (17) αποτελεί μία μη στάσιμη χρονολογική σειρά, παρατηρείται ότι αφού γίνει λήψη των πρώτων διαφορών γίνεται στάσιμη και εν συνεχεία υπολογίζεται η εκτίμηση της παραμέτρου γ . Από τη σχέση $\gamma = \frac{\theta - L_R(1 + \theta)}{1 + L_R(1 + \theta)}$, έχοντας εκτιμήσει τη παράμετρο αυτή, εύκολα εκτιμάται και η παράμετρος θ .

Οι προσομοιώσεις έχουν σχεδιαστεί και τρέξει στο υπολογιστικό πρόγραμμα Microsoft Excel. Για κάθε συνδυασμό παραμέτρων, παράγεται μία χρονολογική σειρά δείγματος ($n = 50, 100, 200$) και εκτελούνται 1000 επαναλήψεις. Τα αποτελέσματα, τα οποία αναφέρονται στις τιμές των γ , θ , και BW , αποτελούν τους μέσους των 1000 επαναληπτικών διαδικασιών.

Στόχος της έρευνας των παραμέτρων γ και θ , αλλά και του φαινομένου BW είναι να εξεταστεί ο βαθμός απόκλισης των εκτιμημένων τιμών των μεταβλητών από τις πραγματικές τους τιμές. Ουσιαστικά, να εξεταστεί η υπόθεση της ανταλλαγής ή μη πληροφοριών μεταξύ των δύο σταδίων της εφοδιαστικής αλυσίδας, λιανοπωλητή – προμηθευτή. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται αναφορά στην δυνατότητα του προμηθευτή χρησιμοποιώντας μόνο παρελθοντικές τιμές της ζήτησής του (παραγγελίες λιανοπωλητή) και γνωρίζοντας μόνο τη μορφή της ζήτησης που αντιμετωπίζει ο λιανοπωλητής ($IMA(1.1)$) να μπορέσει να προβλέψει με σχετικά μεγάλη ακρίβεια την πραγματική ζήτηση που καλείται να καλύψει σύμφωνα με τη σχέση (19) για το χρονικό διάστημα $t + m$.

Στην επόμενη ενότητα υπολογίζονται οι μέσοι όροι των εκτιμημένων τιμών των γ , θ , BW για όλους τους συνδυασμούς των πραγματικών τιμών γ , θ , BW . Επιπλέον, με τη χρήση τύπου $[\hat{x} - x] / x$, γνωστός και ως ρίσκο πρόβλεψης (risk estimation) υπολογίζεται το ποσοστό απόκλισης των εκτιμημένων από τις πραγματικές τιμές για όλες τις περιπτώσεις.

4.4.2. Εκτίμηση και Ανάλυση των Παραμέτρων γ , θ

Από την ανάλυση που προηγήθηκε είναι γνωστό ότι οι παράμετροι θ και γ ισούνται με $\theta = \frac{\gamma + L_R(1 + \gamma)}{1 - L_R(1 + \gamma)}$, $\gamma = \frac{\theta - L_R(1 + \theta)}{1 + L_R(1 + \theta)}$, αντίστοιχα. Για την διερεύνηση της περαιτέρω σχέσης μεταξύ των δύο αυτών παραμέτρων, αλλά και των μέσων εκτιμημένων τιμών τους, δημιουργείται ο πίνακας 1, που απεικονίζει τις πραγματικές τιμές και τις μέσες εκτιμημένες, οι οποίες αντλήθηκαν από τις προσομοιώσεις. Πολύ σημαντικό για την ανάλυση που θα ακολουθήσει είναι γεγονός ότι το θ μεταβάλλεται από -1 έως 1 ($|\theta| < 1$), το γ λαμβάνει τιμές από -1 έως -1/3 $\{\gamma \in (-1, -1/3)\}$, λόγω διασφάλισης της αντιστρεψιμότητας του υποδείγματος της ζήτησης που ορίστηκε. Οι εκτιμήσεις, τέλος, των παραμέτρων γ , θ αποτελούν τους μέσους όρους των 1000 επαναληπτικών διαδικασιών.

Στους παρακάτω πίνακες έχουν καταχωρηθεί οι πραγματικές και οι μέσες εκτιμημένες τιμές των παραμέτρων γ και θ , καθώς και το ρίσκο εκτίμησης, όταν το μέγεθος του δείγματος μεταβάλλεται για $n=50$, $n=100$, και $n=200$ και ο χρόνος παράδοσης της παραγγελίας παραμένει σταθερός και ίσος με τη μονάδα ($L_R = 1$).

Πραγματικές τιμές		Μέσες Εκτιμημένες Τιμές					
		n=50		n=100		n=200	
		$\hat{\gamma}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\theta}$
-0.8333	-0.8	-0.8502	-0.8043	-0.8423	-0.8052	-0.8379	-0.8033
-0.6667	-0.5	-0.6788	-0.4638	-0.672	-0.4885	-0.671	-0.4993
-0.5556	-0.2	-0.5668	-0.0849	-0.5595	-0.1619	-0.56	-0.1912
-0.4545	0.2	-0.4632	-0.0633	-0.4578	0.2998	-0.46	0.228
-0.4	0.5	-0.4063	0.5681	-0.403	0.7476	-0.4044	0.5509
-0.3571	0.8	-0.3631	1.5295	-0.36	1.0708	-0.3615	0.8834

Πίνακας 1 : Πραγματικές και μέσες εκτιμημένες τιμές του γ και θ για διαφορετικές τιμές του δείγματος ($n=50$, $n=100$, $n=200$), όταν $L_R = 1$.

Πραγματικές τιμές		Estimation risk					
		n=50		n=100		n=200	
		$\hat{\gamma}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\theta}$
-0.8333	-0.8	2.03%	0.45%	1.08%	0.65%	0.54%	0.41%
-0.6667	-0.5	1.82%	7.24%	0.8%	2.3%	0.65%	0.14%
-0.5556	-0.2	2.03%	57.54%	0.71%	19.03%	0.77%	4.4%
-0.4545	0.2	1.91%	131.65%	0.72%	49.89%	0.95%	14.02%
-0.4	0.5	1.58%	13.62%	0.74%	49.53%	1.09%	10.18%
-0.3571	0.8	1.67%	91.19%	0.77%	33.85%	1.23%	10.43%

Πίνακας 2 : Ρίσκο εκτίμησης για όλους τους συνδυασμούς παραμέτρων γ και θ , όταν $n=50$, $n=100$, $n=200$ και

$$L_R = 1.$$

Παρατηρείται ότι για τις δεδομένες τιμές του δείγματος και του χρόνου παράδοσης της παραγγελίας, η εκτίμηση της παραμέτρου γ πλησιάζει την πραγματική της τιμή, με το ρίσκο πρόβλεψης να λαμβάνει σχεδόν την τιμή του 2% για $n=50$ και του 1% για $n=100$ και $n=200$. Πιο συγκεκριμένα, για μέγεθος δείγματος $n=50$ και για όλους τους συνδυασμούς της παραμέτρου γ , ο εκτιμητής $\hat{\gamma}$ παρουσιάζει την μεγαλύτερη απόκλιση από την πραγματική του τιμή, σε σχέση με τα άλλα μεγέθη δείγματος που λήφθηκαν. Σε καμία από τις περιπτώσεις που θεωρήθηκαν, ο εκτιμητής $\hat{\gamma}$ δεν είναι αμερόληπτος, δηλαδή ο μέσος όρος των εκτιμήσεων της παραμέτρου γ , που προκύπτει από κάθε δείγμα, δεν ισούται με την πραγματική τιμή της παραμέτρου.

Σχετικά με την τιμή που λαμβάνει ο μέσος εκτιμητής $\hat{\theta}$ παρατηρείται ότι καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται, στις περιπτώσεις που μελετήθηκαν $n=50$, 100 και 200, αυτός τείνει να ισούται με την πραγματική τιμή της παραμέτρου. Πιο ειδικά, όταν το διαθέσιμο δειγματικό μέγεθος είναι $n=50$, τότε η πραγματική τιμή θ υποεκτιμάται, που ισούται με -0.8. Σε αυτή την περίπτωση το ρίσκο πρόβλεψης είναι της τάξεως του 0.45%, αφού η μέση εκτιμημένη τιμή του $\hat{\theta}$ είναι -0.8043.

Υπερεκτίμηση της πραγματικής παραμέτρου θ εμφανίζεται για τιμές -0.5 και -0.2, αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, η πρόβλεψη που λαμβάνει χώρα αποδίδει μέση τιμή εκτίμησης $\hat{\theta}$ ίση με -0.4638, καθώς, η πραγματική τιμή της είναι η -0.5, εμφανίζοντας ρίσκο πρόβλεψης 7.24%. Εν συνεχεία, μεταβαίνοντας σε τιμή πρόβλεψης -0.0849, το ρίσκο πρόβλεψης αυξάνεται σε μεγάλο βαθμό και αγγίζει το ποσοστό του 57.54%, καθώς η πραγματική τιμή είναι η -0.2. Εξαιρετικά αυξημένο συνεχίζει να παραμένει το ρίσκο πρόβλεψης, σε ποσοστό

131.65%, αφού η μέση εκτίμηση $\hat{\theta}$ είναι -0.0633 με αντίστοιχη πραγματική τιμή ίση με 0.2, παρουσιάζοντας υποεκτιμημένο αποτέλεσμα. Τέλος, για τιμές μέσου εκτιμητή $\hat{\theta}$ ίσες με 0.5681 και 1.5295, διαπιστώνεται μία εκ νέου υπερεκτίμηση των πραγματικών τιμών, οι οποίες ισούνται με 0.5 και 0.8, αντίστοιχα. Το ρίσκο πρόβλεψης εμφανίζεται σχετικά αυξημένο στο 13.62% και 91.19%, αντίστοιχα.

Καθώς το μέγεθος του δείγματος ισούται με $n=100$ διαπιστώνεται μια υπερεκτίμηση των πραγματικών τιμών του θ όταν ισούνται με -0.5, -0.2, 0.2, 0.5 και 0.8. Συγκεκριμένα, οι προσομοιώσεις αποδίδουν τιμή μέσης εκτίμησης $\hat{\theta}$ ίση με -0.4885, όταν το πραγματικό μέγεθος της παραμέτρου ισούται με -0.5, παρουσιάζοντας ρίσκο πρόβλεψης 2.3%. Επίσης, για τιμές μέσων εκτιμήσεων $\hat{\theta}$ ίσες με -0.1619 και 1.0708, το ρίσκο πρόβλεψης αγγίζει το 19.03% και 33.85%, αφού οι πραγματικές τιμές της παραμέτρου είναι -0.2 και 0.8, αντίστοιχα. Επιπλέον, όταν εκτιμηθούν μέσες τιμές του θ , 0.2998 και 0.7476, τότε το ρίσκο πρόβλεψης ισούται με 49.89% και 49.53%, δεδομένου ότι οι πραγματικές τιμές της παραμέτρου είναι ίσες με 0.2 και 0.5, αντίστοιχα. Τέλος, με το εκτιμημένο θ να ισούται με -0.8052, το ρίσκο πρόβλεψης αντιστοιχεί σε τιμή το 0.65%, όταν η πραγματική τιμή είναι το -0.8(υποεκτίμηση).

Στην περίπτωση όπου η διαθεσιμότητα του δείγματος είναι 200 παρατηρήσεων ($n=200$), όπως είναι αναμενόμενο οι αποκλίσεις των μέσων εκτιμήσεων από τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων θ τείνουν να μειώνονται εξαιρετικά, όσο το δείγμα αυξάνεται. Πιο συγκεκριμένα, το ρίσκο πρόβλεψης της πραγματικής τιμής της παραμέτρου θ λαμβάνει σχεδόν μηδενική τιμή (0.41%, 0.14%) όταν η μέση εκτίμηση αυτής ισούται με -0.8033 και -0.4993 και η πραγματική της τιμή ισούται με -0.8 και -0.5, αντίστοιχα. Επιπλέον, υπερεκτίμηση της παραμέτρου θ εμφανίζεται στις περιπτώσεις όπου το πραγματικό μέγεθος λαμβάνει τις τιμές 0.2, 0.5 και 0.8. Ειδικότερα, όταν η πραγματική παράμετρος θ ισούται με 0.5 και 0.8, οι εκτιμημένες τιμές $\hat{\theta}$ αντιστοιχούν σε 0.5509 και 0.8834, με το ρίσκο πρόβλεψης να κυμαίνεται περίπου στο 10%. Αύξηση του ρίσκου πρόβλεψης παρουσιάζεται όταν η ανάλυση καταλήγει σε εκτίμηση του θ ίση με 0.228 της τάξεως του 14.02%, αφού η πραγματική τιμή του είναι το 0.2. Τέλος, επίσης υπερεκτιμημένη εμφανίζεται η τιμή θ που ισούται με -0.2, αφού η μέση εκτίμηση αυτής είναι -0.1912, με το ρίσκο πρόβλεψης να είναι στο 4.4%.

4.4.3. Έλεγχος Διαπιστώσεως της Κανονικότητας Jarque-Bera των Εκτιμημένων Παραμέτρων

Οι Jarque & Bera (1980, 1981) πρότειναν έναν έλεγχο περί κανονικότητας της κατανομής μίας μεταβλητής, η οποία βασίζεται σε δύο υποθέσεις. Η αρχική, έστω H_0 , υποθέτει κανονικότητα με την τιμή JB να είναι μικρή και την πιθανότητα λάθους να απορρίψουμε την H_0 να είναι μεγάλη (Probability > 0.05), αντίθετα με την εναλλακτική υπόθεση, έστω H_a , όπου η μεταβλητή δεν κατανέμεται κανονικά και η τιμή JB που λαμβάνει είναι μεγάλη, με την πιθανότητα λάθους να είναι μικρή (Probability < 0.05). Εν συνεχεία, με τη χρήση ιστογράμματος συχνοτήτων τα οποία παρατίθενται στο παράρτημα και του τεστ κανονικότητας ελέγχονται σε κάθε περίπτωση οι εκτιμημένες τιμές των παραμέτρων γ , θ αν έχουν τα γνωστά χαρακτηριστικά της κανονικής κατανομής.

Οι πίνακες που εκτίθενται ταξινομούνται κάθε φορά με βάσει το μέγεθος του δείγματος και ύστερα με τις τιμές που λαμβάνουν οι εκτιμητές $\hat{\gamma}$ και $\hat{\theta}$, ως αποτέλεσμα των 1000 επαναληπτικών διαδικασιών.

4.4.3.1. Έλεγχος Κανονικότητας του $\hat{\gamma}$ για $n=50$

Ο πίνακας 3 που ακολουθεί αναφέρεται στις τιμές των μέσων εκτιμημένων γ , καθώς και στα κριτήρια χαρακτηρισμού μίας κατανομής ως κανονική για μέγεθος δείγματος 50 παρατηρήσεων ($n=50$).

Πραγματικές τιμές γ	Μέσες εκτιμημένες τιμές $\hat{\gamma}$	Δείγμα 50 παρατηρήσεων ($n=50$)			
		1000 replications			
		Συντελεστής Ασυμμετρίας (S)	Συντελεστής Κύρτωσης (K)	Στατιστικό Jarque- Bera(JB)	Πιθανότητα (Prob.)
-0.8333	-0.8502	0.3727	2.9433	23.2915	0.00001
-0.6667	-0.6788	-0.097	3.2856	4.9661	0.0835
-0.5556	-0.5668	-0.2305	3.545	21.2292	0.00002
-0.4545	-0.4632	-0.1926	3.7569	30.0552	0.0000
-0.4	-0.4063	-0.1357	3.6379	20.0254	0.00004
-0.3571	-0.3631	-0.1366	3.5994	18.0822	0.0001

Πίνακας 3 : Τιμές Κριτηρίων Χαρακτηρισμού Κανονικής Κατανομής των Εκτιμημένων γ για $n=50$

Από την παραγωγή των 1000 εκτιμημένων τιμών της παραμέτρου γ με πραγματική τιμή ίση με -0.8333, προκύπτει ότι η τιμή του JB = 23.2915 είναι πολύ μεγάλη και ότι η πιθανότητα, Prob = 0.00001 < 0.05, γεγονός το οποίο δηλώνει πως η κατανομή της $\hat{\gamma}$ δεν είναι η κανονική. Η κατανομή παρουσιάζει θετική ασυμμετρία ($S>0$) και είναι πλατύκυρτη ($K<3$).

Εν συνεχεία, όταν η πραγματική τιμή της παραμέτρου ισούται με -0.6667 από την κατανομή των εκτιμημένων παραμέτρων της γ συμπεραίνεται ότι η τιμή του JB = 4.9661 είναι μικρή και ότι η πιθανότητα, Prob = 0.0835 > 0.05, γεγονός το οποίο δηλώνει πως η κατανομή της $\hat{\gamma}$ είναι η κανονική. Η κατανομή παρουσιάζει αρνητική ασυμμετρία ($S<0$) και είναι λεπτόκυρτη ($K>3$).

Στην περίπτωση όπου η πραγματική τιμή της παραμέτρου γ ισούται με -0.5556, η τιμή του JB = 21.2292 είναι μεγάλη και η πιθανότητα, Prob = 0.00002 < 0.05, γεγονός το οποίο δηλώνει πως η κατανομή της $\hat{\gamma}$ δεν είναι η κανονική. Η κατανομή παρουσιάζει αρνητική ασυμμετρία ($S<0$) και είναι λεπτόκυρτη ($K>3$).

Επιπλέον, καθώς η τιμή του $JB = 30.0552$ είναι μεγάλη και η πιθανότητα, $Prob = 0.0000 < 0.05$, η κατανομή της $\hat{\gamma}$ δεν είναι η κανονική. Παρουσιάζεται αρνητική ασυμμετρία ($S < 0$) και η κατανομή είναι λεπτόκυρτη ($K > 3$). Η μη κανονικότητα συμβαίνει όταν το πραγματικό γ ισούται με -0.4545 .

Τέλος, για τις περιπτώσεις όπου οι πραγματικές τιμές της γ ισούνται με -0.4 και -0.3571 , αντίστοιχα, συμπεραίνεται ότι οι κατανομές δειγματοληψίας δεν είναι οι κανονικές. Καθώς οι τιμές του JB των δύο κατανομών είναι αρκετά μεγάλες ($JB=20.0254$ και $JB=18.0822$) με πιθανότητες πολύ κάτω του 0.05 προκύπτει αυτό το συμπέρασμα. Επιπλέον, οι κατανομές παρουσιάζουν αρνητική ασυμμετρία ($S < 0$) και είναι λεπτόκυρτες ($K > 3$).

4.4.3.2. Έλεγχος Κανονικότητας του $\hat{\gamma}$ για $n=100$

Ο πίνακας που ακολουθεί αναφέρεται στις τιμές των μέσων εκτιμημένων γ , καθώς και στα κριτήρια χαρακτηρισμού μίας κατανομής ως κανονική για μέγεθος δείγματος 100 παρατηρήσεων ($n=100$).

Πραγματικές τιμές γ	Μέσες εκτιμημένες τιμές $\hat{\gamma}$	Δείγμα 100 παρατηρήσεων ($n=100$)			
		1000 replications			
		Συντελεστής Ασυμμετρίας (S)	Συντελεστής Κύρτωσης (K)	Στατιστικό Jarque- Bera(JB)	Πιθανότητα (Prob.)
-0.8333	-0.8423	-0.0086	3.3617	5.4645	0.0651
-0.6667	-0.672	-0.0616	3.4577	9.3625	0.0093
-0.5556	-0.5595	-0.023	3.1269	0.7596	0.684
-0.4545	-0.4578	0.0078	3.0657	0.19	0.9094
-0.4	-0.403	0.0301	3.1041	0.6024	0.74
-0.3571	-0.36	0.043	3.146	1.1974	0.5495

Πίνακας 4 : Τιμές Κριτηρίων Χαρακτηρισμού Κανονικής Κατανομής των Εκτιμημένων γ για $n=100$

Στην περίπτωση όπου το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται κατά 50 παρατηρήσεις ($n=100$), οι κατανομές των εκτιμημένων γ που εξετάζονται εμφανίζουν κανονικότητα, εκτός της κατανομής που αποδίδει μέση εκτιμημένη τιμή $\hat{\gamma} = -0.672$. Πιο συγκεκριμένα, όταν η μέση

εκτιμημένη τιμή της γ ισούται με -0.8423 , η τιμή του στατιστικού $JB = 5.4645$ με πιθανότητα, $Prob = 0.0651 > 0.05$, μικρής απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, προκύπτει ότι η κατανομή είναι κανονική. Εμφανίζεται αρνητική ασυμμετρία ($S < 0$) με παχιές ουρές - λεπτόκυρτη ($K > 3$).

Η κατανομή των εκτιμημένων τιμών της παραμέτρου γ που οδηγεί σε μέση εκτιμημένη τιμή ίση με -0.672 δεν είναι κανονική, αφού η τιμή του $JB = 9.3625$ είναι μεγάλη και η πιθανότητα, $Prob = 0.0093 < 0.05$. Η κατανομή παρουσιάζει αρνητική ασυμμετρία ($S < 0$) με παχιές ουρές - λεπτόκυρτη ($K > 3$).

Από τα στοιχεία του πίνακα της περίπτωσης όπου το $\hat{\gamma} = -0.5595$ προκύπτει ότι η τιμή του $JB = 0.7596$ είναι μικρή και ότι η πιθανότητα, $Prob = 0.684 > 0.05$, γεγονός το οποίο δηλώνει πως η κατανομή της $\hat{\gamma}$ είναι η κανονική. Η κατανομή παρουσιάζει αρνητική ασυμμετρία ($S < 0$) με παχιές ουρές - λεπτόκυρτη ($K > 3$).

Μεταβαίνοντας σε μέση εκτιμημένη τιμή του γ ίση με -0.457 , προκύπτει ότι η κατανομή της $\hat{\gamma}$ είναι κανονική. Το συμπέρασμα αυτό εξάγεται από το γεγονός ότι η πιθανότητα αποδοχής της μηδενικής υπόθεσης είναι αρκετά μεγάλη, $Prob = 0.9094 > 0.05$ με τιμή στατιστικού ελέγχου $JB = 0.19$. Η κατανομή εμφανίζεται σχεδόν συμμετρική ($S \approx 0$) με λεπτές ουρές - πλατύκυρτη ($K > 3$).

Επιπλέον, εξετάζοντας την κατανομή της μέσης εκτιμημένης παραμέτρου $\hat{\gamma} = -0.403$, αντιλαμβάνεται ότι αυτή είναι κανονική με λεπτές ουρές (πλατύκυρτη, $K > 3$) και σχεδόν συμμετρική ($S \approx 0$). Η τιμή του $JB = 0.6025$ είναι μικρή και η πιθανότητα, $Prob = 0.74 > 0.05$.

Τέλος, κανονικότητα των εκτιμήσεων φαίνεται να προκύπτει και όταν το αποτέλεσμα της ανάλυσης των 1000 εκτιμημένων γ οδηγεί σε μέση εκτιμημένη τιμή $\hat{\gamma} = -0.36$. Η κατανομή είναι σχεδόν συμμετρική ($S \approx 0$) με λεπτές ουρές - πλατύκυρτη ($K > 3$) και τιμή $JB = 1.1974$ με πιθανότητα, $Prob = 0.5495 > 0.05$.

4.4.3.3. Έλεγχος Κανονικότητας του $\hat{\gamma}$ για $n=200$

Ο πίνακας που ακολουθεί αναφέρεται στις τιμές των μέσων εκτιμημένων γ , καθώς και στα κριτήρια χαρακτηρισμού μίας κατανομής ως κανονική για μέγεθος δείγματος 200 παρατηρήσεων ($n=200$).

Πραγματικές τιμές γ	Μέσες εκτιμημένες τιμές $\hat{\gamma}$	Δείγμα 200 παρατηρήσεων ($n=200$)			
		1000 replications			
		Συντελεστής Ασυμμετρίας (S)	Συντελεστής Κύρτωσης (K)	Στατιστικό Jarque- Bera(JB)	Πιθανότητα (Prob.)
-0.8333	-0.8379	0.0773	3.998	7.5961	0.0224
-0.6667	-0.671	0.0665	3.0141	0.7454	0.6889
-0.5556	-0.56	0.0216	2.9345	0.2566	0.8796
-0.4545	-0.46	0.0085	2.9027	0.406	0.8163
-0.4	-0.4044	0.006	2.9064	0.3707	0.831
-0.3571	-0.3615	0.0035	2.9167	0.2912	0.8645

Πίνακας 5 : Τιμές Κριτηρίων Χαρακτηρισμού Κανονικής Κατανομής των Εκτιμημένων γ για $n=200$

Στην περίπτωση όπου το μέγεθος του δείγματος είναι $n=200$, από τα στοιχεία του ανωτέρω πίνακα, για μέση εκτιμημένη τιμή $\hat{\gamma} = -0.8379$, προκύπτει ότι η τιμή του $JB = 7.5961$ είναι μεγάλη και σε συνδυασμό ότι η τιμή αυτή οδηγεί σε ένα επίπεδο πιθανότητας, $Prob = 0.0224$ που είναι αρκετά μικρό, εξάγεται το συμπέρασμα της απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης περί κανονικότητας της $\hat{\gamma}$. Η κατανομή είναι σχεδόν συμμετρική ($S \approx 0$) και λεπτόκυρτη ($K > 3$).

Σε ένα συμπέρασμα αποδοχής της μηδενικής υπόθεσης περί κανονικότητας της $\hat{\gamma}$ οδηγούμαστε όταν η τιμή του $JB = 0.7454$ είναι μικρή και σε συνδυασμό ότι η τιμή αυτή οδηγεί σε ένα επίπεδο πιθανότητας, $Prob = 0.6889$, το οποίο είναι αρκετά μεγάλο, για μέση εκτιμημένη τιμή ίση με -0.671 . Η κατανομή είναι σχεδόν συμμετρική ($S \approx 0$) και σχεδόν σβήνει ομοιόμορφα στα άκρα ($K \approx 3$, κωδωνοειδής μορφή).

Πραγματοποίηση ανάλυσης της περίπτωσης όπου το $\hat{\gamma} = -0.56$, συμπεραίνεται ότι η κανονικότητα της $\hat{\gamma}$ ισχύει. Η απόδοση αυτού οφείλεται στο γεγονός ότι οι τιμές του $JB = 0.2566$ αλλά και της πιθανότητας, $Prob = 0.8796$, αποτελούν κριτήρια αποδοχής της κανονικής

κατανομής. Η κατανομή εμφανίζεται σχεδόν συμμετρική ($S \approx 0$) και σχεδόν σβήνει ομοιόμορφα στα άκρα ($K \approx 3$, κωδωνοειδής μορφή).

Εξετάζοντας την τιμή του $JB = 0.406$ η οποία είναι μικρή και σε συνδυασμό ότι η τιμή αυτή οδηγεί σε ένα επίπεδο πιθανότητας, $Prob = 0.8163$, το οποίο είναι αρκετά μεγάλο, εξάγεται το συμπέρασμα της αποδοχής της μηδενικής υπόθεσης περί κανονικότητας της $\hat{\gamma}$, όταν η μέση εκτιμημένη τιμή της ισούται με -0.46 . Η κατανομή είναι σχεδόν συμμετρική ($S \approx 0$) και σχεδόν σβήνει ομοιόμορφα στα άκρα ($K \approx 3$, κωδωνοειδής μορφή).

Λόγος απόρριψης της εναλλακτικής υπόθεσης προκύπτει για μέση εκτιμημένη τιμή παραμέτρου ίση με -0.4044 . Η αιτιολόγηση έγκειται στο γεγονός ότι η τιμή του $JB = 0.3707$ είναι μικρή και σε συνδυασμό ότι η τιμή αυτή οδηγεί σε ένα επίπεδο πιθανότητας, $Prob = 0.8301$. Η κατανομή είναι σχεδόν συμμετρική ($S \approx 0$) και σχεδόν σβήνει ομοιόμορφα στα άκρα ($K \approx 3$, κωδωνοειδής μορφή).

Τέλος, κανονικότητα των εκτιμήσεων φαίνεται να προκύπτει και όταν το αποτέλεσμα της ανάλυσης των 1000 εκτιμημένων γ οδηγεί σε μέση εκτιμημένη τιμή $\hat{\gamma} = -0.3615$. Η κατανομή είναι σχεδόν συμμετρική ($S \approx 0$) και σχεδόν σβήνει ομοιόμορφα στα άκρα ($K \approx 3$, κωδωνοειδής μορφή) με τιμή $JB = 0.2912$ και πιθανότητα, $Prob = 0.8645 > 0.05$.

Η κανονικότητα ή μη των εκτιμήσεων φαίνεται επιπλέον στο κάθε ένα ξεχωριστά ιστόγραμμα του παραρτήματος, το οποίο προήλθε από τις ίδιες εκτιμημένες τιμές του γ , επειδή αυτό προσαρμόζει ή όχι την κανονική κατανομή. Βέβαια, να τονισθεί ότι η διαγραμματική αυτή μέθοδος είναι αρκετά υποκειμενική και ενέχει μεγάλο ρίσκο λήψης απόφασης, χωρίς την χρήση κατάλληλων κριτηρίων ελέγχου.

4.4.3.4. Έλεγχος Κανονικότητας του $\hat{\theta}$ για $n=50$

Ο πίνακας που ακολουθεί αναφέρεται στις τιμές των μέσων εκτιμημένων θ , καθώς και στα κριτήρια χαρακτηρισμού μίας κατανομής ως κανονική για μέγεθος δείγματος 50 παρατηρήσεων ($n=50$).

Πραγματικές τιμές	Μέσες εκτιμημένες τιμές	Δείγμα 50 παρατηρήσεων ($n=50$)			
		1000 replications			
θ	$\hat{\theta}$	Συντελεστής Ασυμμετρίας (S)	Συντελεστής Κύρτωσης (K)	Στατιστικό Jarque- Bera(JB)	Πιθανότητα (Prob.)
-0.8	-0.8043	1.4053	7.1847	1058.812	0.0000
-0.5	-0.4638	1.9961	11.5685	3723.161	0.0000
-0.2	-0.0849	5.4069	58.2455	132041.9	0.0000
0.2	-0.0633	-30.2987	944.2676	37069033	0.0000
0.5	0.5681	-16.2794	429.2502	7614556	0.0000
0.8	1.5295	22.4471	653.9303	17738573	0.0000

Πίνακας 6 : Τιμές Κριτηρίων Χαρακτηρισμού Κανονικής Κατανομής των Εκτιμημένων θ για $n=50$

Από την παραγωγή των 1000 εκτιμημένων τιμών της παραμέτρου θ με πραγματική τιμή ίση με -0.8, προκύπτει ότι η τιμή του $JB = 1058.812$ είναι πολύ μεγάλη και ότι η πιθανότητα, $Prob = 0.0000 < 0.05$, γεγονός το οποίο δηλώνει πως η κατανομή της $\hat{\theta}$ δεν είναι η κανονική. Επειδή $S > 0$ η κατανομή παρουσιάζει μακριά δεξιά ουρά (θετική ασυμμετρία) και είναι λεπτόκυρτη αφού $K > 3$.

Εν συνεχεία, όταν η πραγματική τιμή της παραμέτρου ισούται με -0.5 από την κατανομή των εκτιμημένων παραμέτρων της θ συμπεραίνεται ότι η τιμή του $JB = 3723.161$ είναι πολύ μεγάλη και ότι η πιθανότητα, $Prob = 0.0000 < 0.05$, γεγονός το οποίο δηλώνει πως η κατανομή της $\hat{\theta}$ δεν είναι η κανονική. Επειδή $S > 0$ η κατανομή παρουσιάζει μακριά δεξιά ουρά (θετική ασυμμετρία) και είναι λεπτόκυρτη αφού $K > 3$.

Στην περίπτωση όπου η πραγματική τιμή της παραμέτρου θ ισούται με -0.2, η τιμή του $JB = 132041.9$ είναι μεγάλη και η πιθανότητα, $Prob = 0.0000 < 0.05$, γεγονός το οποίο δηλώνει πως η κατανομή της $\hat{\theta}$ δεν είναι η κανονική. Επειδή $S > 0$ η κατανομή παρουσιάζει μακριά δεξιά ουρά (θετική ασυμμετρία) και είναι λεπτόκυρτη αφού $K > 3$.

Επιπλέον, καθώς η τιμή του $JB = 37069033$ είναι μεγάλη και η πιθανότητα, $Prob = 0.0000 < 0.05$, η κατανομή της $\hat{\theta}$ δεν είναι η κανονική. Επειδή $S < 0$ η κατανομή παρουσιάζει μακριά αριστερή ουρά (αρνητική ασυμμετρία) και είναι λεπτόκυρτη, αφού $K > 3$. Η μη κανονικότητα συμβαίνει όταν το πραγματικό θ ισούται με 0.2.

Τέλος, για τις περιπτώσεις όπου οι πραγματικές τιμές του θ ισούνται με 0.5 και 0.8, αντίστοιχα, συμπεραίνεται ότι οι κατανομές δειγματοληψίας, επίσης, δεν είναι κανονικές. Καθώς οι τιμές του JB των δύο κατανομών είναι αρκετά μεγάλες ($JB=7614556$ και $JB=17738573$) με πιθανότητες ίσες του μηδενός ($Prob. = 0.0000 < 0.05$) προκύπτει αυτό το συμπέρασμα. Επιπλέον, για τις δύο αυτές κατανομές ισχύει ότι $K > 3$ (λεπτόκυρτες), ενώ η ασυμμετρία διαφοροποιείται, καθώς $S < 0$ (μακριά αριστερή ουρά- αρνητική ασυμμετρία) και $S > 0$ (μακριά δεξιά ουρά-θετική ασυμμετρία), αντίστοιχα.

4.4.3.5. Έλεγχος Κανονικότητας του $\hat{\theta}$ για $n=100$

Ο πίνακας που ακολουθεί αναφέρεται στις τιμές των μέσων εκτιμημένων θ , καθώς και στα κριτήρια χαρακτηρισμού μίας κατανομής ως κανονική για μέγεθος δείγματος 100 παρατηρήσεων ($n=100$).

Πραγματικές τιμές	Μέσες εκτιμημένες τιμές	Δείγμα 100 παρατηρήσεων ($n=100$)			
		1000 replications			
θ	$\hat{\theta}$	Συντελεστής Ασυμμετρίας (S)	Συντελεστής Κύρτωσης (K)	Στατιστικό Jarque- Bera(JB)	Πιθανότητα (Prob.)
-0.8	-0.8052	0.6234	4.4896	157.2324	0.0000
-0.5	-0.4885	0.9058	4.9735	299.0146	0.0000
-0.2	-0.1619	1.2586	6.3779	739.4332	0.0000
0.2	0.2998	2.5353	17.7622	10151.48	0.0000
0.5	0.7476	27.1167	810.8545	27315424	0.0000
0.8	1.0708	10.2853	249.9554	2558756	0.0000

Πίνακας 7 : Τιμές Κριτηρίων Χαρακτηρισμού Κανονικής Κατανομής των Εκτιμημένων θ για $n=100$

Στην περίπτωση όπου το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται κατά 50 παρατηρήσεις ($n=100$) παρατηρείται ότι καμία από τις κατανομές των εκτιμημένων θ που εξετάζονται δεν εμφανίζουν κανονικότητα. Πιο συγκεκριμένα, για όλες τις εξεταζόμενες τιμές, η τιμή του στατιστικού JB είναι εξαιρετικά μεγάλη, κάτι το οποίο οδηγεί σε πιθανότητα λάθους αποδοχής της εναλλακτικής υπόθεσης, μηδενική ($\text{Prob} = 0.0000 > 0.05$). Οι συντελεστές ασυμμετρίας των κατανομών είναι όλοι ($S > 0$) παρουσιάζοντας μακριά δεξιά ουρά (θετική ασυμμετρία). Επιπλέον, τονίζεται ότι ο συντελεστής κύρτωσης είναι μεν θετικός για εκτιμημένες τιμές του θ , $\hat{\theta} = -0.8052, -0.4885, -0.1619, 0.2998$, αλλά η τιμή του γίνεται εξαιρετικά μεγάλη για $\hat{\theta} = 0.7476, 1.0708$, εμφανίζοντας σε κάθε περίπτωση υπερβολική κύρτωση.

4.4.3.6. Έλεγχος κανονικότητας του $\hat{\theta}$ για $n=200$

Ο πίνακας που ακολουθεί αναφέρεται στις τιμές των μέσων εκτιμημένων θ , καθώς και στα κριτήρια χαρακτηρισμού μίας κατανομής ως κανονική για μέγεθος δείγματος 200 παρατηρήσεων ($n=200$).

Πραγματικές τιμές	Μέσες εκτιμημένες τιμές	Δείγμα 200 παρατηρήσεων ($n=200$)			
		1000 replications			
θ	$\hat{\theta}$	Συντελεστής Ασυμμετρίας (S)	Συντελεστής Κύρτωσης (K)	Στατιστικό Jarque- Bera(JB)	Πιθανότητα (Prob.)
-0.8	-0.8033	0.4741	4.0602	84.3057	0.0000
-0.5	-0.4993	0.6663	4.5456	173.5326	0.0000
-0.2	-0.1912	0.8372	5.2	318.4357	0.0000
0.2	0.228	1.1481	6.6425	772.5234	0.0000
0.5	0.5509	1.4621	8.6029	1664.308	0.0000
0.8	0.8834	1.8971	12.1148	4061.485	0.0000

Πίνακας 8 : Τιμές Κριτηρίων Χαρακτηρισμού Κανονικής Κατανομής των Εκτιμημένων θ για $n=200$

Παρατηρείται ότι με την δυνατότητα κατοχής δείγματος 200 παρατηρήσεων, οι κατανομές των εκτιμημένων θ δεν λαμβάνουν μορφή κανονικής κατανομής. Για όλες τις περιπτώσεις ανάλυσης του συντελεστή θ , οι κατανομές εμφανίζουν υπερβολική κύρτωση, έχοντας θεωρητικά υψηλότερη κορυφή της κανονικής και φθίνοντας απότομα με μεγαλύτερη

συγκέντρωση στις ουρές ($K > 3$). Οι τιμές που λαμβάνει το JB είναι εξαιρετικά μεγάλες υποδεικνύοντας μη κανονικότητα. Επίσης, κάθε συντελεστής ασυμμετρίας είναι θετικός ($S > 0$), δηλώνοντας μακριές δεξιές ουρές.

4.4.4. Ποσοτικοποίηση του Φαινομένου Bullwhip (Bullwhip Effect)

Στην συνέχεια της αριθμητικής ανάλυσης και έρευνας, ας επιτραπεί η ανάπτυξη του μαθηματικού τύπου του BW ως συνάρτηση του χρόνου (t), της παραμέτρου (θ) και του χρόνου παράδοσης της παραγγελίας (L_R). Συνεπώς, όταν η ζήτηση του λιανοπωλητή σε κάθε χρονική περίοδο διαμορφώνεται σύμφωνα με ένα ARIMA(0,1,1) υπόδειγμα, τότε η ζήτηση του προμηθευτή, όπως αποδείχθηκε ακολουθεί και αυτή ένα ARIMA(0,1,1) υπόδειγμα. Πράγματι,

$$q_1^{(R)} = \mu + \xi_1, t = 1 \text{ και}$$

$$q_t^{(R)} = q_{t-1}^{(R)} + \gamma \xi_{t-1} + \xi_t, t = 2, 3, 4, \dots, (17)$$

$$\text{όπου } \gamma = \frac{\theta - L_R(1 + \theta)}{1 + L_R(1 + \theta)}, \xi_t = \{1 + L_R(1 + \theta)\} \varepsilon_t \text{ και } \sigma_\xi^2 = \{1 + L_R(1 + \theta)\}^2 \sigma_\varepsilon^2$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο της $q_t^{(R)}$, ο οποίος δίνεται από την (17) και βρισκόμενοι στην χρονική περίοδο t με επαναλαμβανόμενες χρονικά αντικαταστάσεις εκφράζεται το μέγεθος της ζήτησης του λιανοπωλητή την περίοδο t βάσει της σχέσης :

$$q_t^{(R)} = \mu + (1 + \gamma) \sum_{j=1}^{t-1} \xi_{t-j} + \xi_t \{ \text{Υποθέτω ότι } \sum_{i=a}^b () = 0 \} (29)$$

Την χρονική στιγμή t , η διακύμανση της ζήτησης αλλά και των παραγγελιών του λιανοπωλητή δίνονται, αντίστοιχα ως :

$$\text{Var}(q_t^{(R)}) = \sigma_\xi^2 \{ (t-1)(1 + \theta)^2 + \{1 + L_R(1 + \theta)\}^2 \} (30)$$

και

$$\text{Var}(d_t) = \sigma_\xi^2 \{ (t-1)(1 + \theta)^2 + 1 \} (31)$$

Το Bullwhip Effect μπορεί να μετρηθεί από το λόγο $BW_t^{(R)} = \frac{\text{Var}(q_t^{(R)})/E(q_t^{(R)})}{\text{Var}(d_t)/E(d_t)}$ και

δεδομένου των σχέσεων (30),(31) και της ισότητας $E(q_t^{(R)}) = \mu = E(d_t)$ λαμβάνεται ότι :

$$BW_t^{(R)} = 1 + \frac{L_R(1 + \theta)\{2 + L_R(1 + \theta)\}}{(t-1)(1 + \theta)^2 + 1} (32)$$

Από τη σχέση (32) γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι ο λόγος του BW δεν παραμένει σταθερός ως προς το χρόνο. Επομένως, οι τρεις παράγοντες που διαμορφώνουν την τιμή του BW, όπως προαναφέρθηκε είναι η παράμετρος θ , ο χρόνος παράδοσης της παραγγελίας L_R , καθώς και η χρονική στιγμή t .

Χρησιμοποιώντας τον ανωτέρω τύπο, πραγματοποιήθηκε υπολογισμός των πραγματικών τιμών του Bullwhip effect καθώς και των μέσων εκτιμημένων για όλους του συνδυασμούς της πραγματικής τιμής της παραμέτρου θ και της μέσης εκτιμημένης, ομοίως. Τα δείγματα που λαμβάνονται υπόψη είναι $n=50$, $n=100$ και $n=200$, αποτελώντας τιμές οι οποίες εμπεριέχονται στον μαθηματικό τύπο του μεταβλητού BW και αντιστοιχούν στο χρόνο (t). Η υπόθεση του χρόνου παράδοσης της παραγγελίας εξακολουθεί να θεωρείται ως μοναδιαία ($L_R=1$).

4.4.4.1. Υπολογισμός του BW για $n=50$

θ	$\hat{\theta}$	$n=50$		
		Πραγματική τιμή BW ($t=50$)	Μέση Εκτιμημένη τιμή BW ($t=50$)	Estimation risk
-0.8	-0.8043	1.148649	1.149373	0.06%
-0.5	-0.4638	1.09434	1.09013	-0.38%
-0.2	-0.0849	1.069221	1.063465	-0.54%
0.2	-0.0633	1.053661	1.062528	0.84%
0.5	0.5681	1.047191	1.046055	-0.11%
0.8	1.5295	1.042814	1.036428	-0.61%

Πίνακας 9 : Πραγματικές και Μέσες Εκτιμημένες Τιμές του BW για $n=50$ – Estimation Risk.

Ο πίνακας 9, αναφέρεται στις τιμές του πραγματικού και εκτιμημένου BW, καθώς η πραγματική παράμετρος θ μεταβάλλεται από -0.8 έως 0.8 και η μέση εκτιμημένη $\hat{\theta}$ από -0.8043 έως 1.5295 για χρόνο $t = 50$. Εξετάζοντας κάποιος τις τιμές που προκύπτουν διαπιστώνει πως σε κάθε στάδιο υπολογισμού της τιμής της μέσης εκτίμησης του BW_t για $t=50$, η εκτίμηση αυτή σχεδόν δεν διαφέρει από την πραγματική της τιμή. Το συμπέρασμα αυτό αποτυπώνεται και από το ρίσκο εκτίμησης που υπολογίσθηκε, αφού η τιμή αυτού του δείκτη παραμένει σταθερά κάτω από το 1% σε απόλυτες τιμές. Βέβαια, αξίζει αν σημειωθεί ότι η μεταβλητότητα

της ζήτησης που αντιμετωπίζει ο προμηθευτής σχετικά με αυτή του λιανοπωλητή υφίσταται, αφού $BW_t > 1$, σε πάρα πολύ μικρό βαθμό.

4.4.4.2. Υπολογισμός του BW για n=100

θ	$\hat{\theta}$	n =100		
		Πραγματική τιμή BW (t=100)	Μέση εκτιμημένη τιμή BW (t=100)	Estimation risk
-0.8	-0.8052	1.08871	1.089882	0.11%
-0.5	-0.4885	1.048544	1.047752	-0.08%
-0.2	-0.1619	1.034804	1.033722	-0.10%
0.2	0.3	1.026748	1.025491	-0.12%
0.5	0.7476	1.023464	1.021589	-0.18%
0.8	1.071	1.021258	1.01981	-0.14%

Πίνακας 10 : Πραγματικές και Μέσες Εκτιμημένες Τιμές του BW για n=100 – Estimation Risk.

Συγκρίνοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα τα οποία εκτίθενται στον πίνακα 10, προκύπτει ότι το φαινόμενο του BW εξακολουθεί να υφίσταται σε πάρα πολύ μικρό βαθμό και το ρίσκο εκτίμησης όλων των περιπτώσεων να αντιστοιχεί κάτω του 0.2% σε απόλυτες τιμές. Να σημειωθεί ότι η αύξηση του δείγματος οδήγησε, όπως ήταν αναμενόμενο σε καλύτερες εκτιμήσεις.

4.4.4.3. Υπολογισμός του BW για n=200

θ	$\hat{\theta}$	n =100		
		Πραγματική τιμή BW (t=200)	Μέση εκτιμημένη τιμή BW (t=200)	Estimation risk
-0.8	-0.8033	1.049107	1.049667	0.05%
-0.5	-0.4993	1.024631	1.024605	0.00%
-0.2	-0.1912	1.017451	1.017318	-0.01%
0.2	0.228	1.013354	1.013165	-0.02%
0.5	0.5509	1.011699	1.011481	-0.02%
0.8	0.8834	1.010592	1.010347	-0.02%

Πίνακας 11 : Πραγματικές και Μέσες Εκτιμημένες Τιμές του BW για n=200 – Estimation Risk.

Στην περίπτωση όπου το μέγεθος του δείγματος που διατίθεται είναι 200 παρατηρήσεων, τα συμπεράσματα είναι ισοδύναμα με αυτά των 50 και 100 παρατηρήσεων, σχετικά με το βαθμό ύπαρξης του φαινομένου. Η μόνη διαφορά που διαπιστώνεται είναι πως η αύξηση του δείγματος οδηγεί σε καλύτερες μέσες εκτιμημένες τιμές του φαινομένου αποδίδοντας εξαιρετικά μικρό ρίσκο εκτίμησης της τάξεως του από 0% έως 0.05% σε απόλυτες τιμές.

5. Συμπεράσματα και Περαιτέρω Έρευνα

Στην παρούσα εργασία υιοθετείται και εξετάζεται μία ειδική περίπτωση του συστήματος περιοδικής επιθεώρησης του αποθέματος, η πολιτική "παραγγελιών αναπλήρωσης στοχευμένου επιπέδου αποθέματος (Order-up-to level), επιτρέποντας την υπόθεση της ύπαρξης μιας εφοδιαστικής αλυσίδας δύο σταδίων για ένα προϊόν, αποτελούμενη από ένα λιανοπωλητή και ένα προμηθευτή, με τους χρόνους παράδοσης της παραγγελίας να ορίζονται μοναδιαίοι ($L_R=L_S=1$). Μάλιστα, η ειδική αυτή πολιτική αναπλήρωσης, εφαρμόζεται για την περίπτωση στην οποία πραγματοποιείται διαμοιρασμός της πληροφορίας (Information Sharing - IS) μεταξύ των συμμετεχόντων στην εφοδιαστική αλυσίδα, της ζήτησης των καταναλωτών, αλλά και στην υπόθεση αδυναμίας ανταλλαγής πληροφοριών (No Information Sharing - NIS).

Λαμβάνοντας ως δεδομένο ότι η ζήτηση που καλείται να ικανοποιήσει ο λιανοπωλητής διαμορφώνεται σύμφωνα με ένα ολοκληρωμένο υπόδειγμα κινητών μέσων (Integrated moving average process – IMA(1.1)) της ζήτησης, αποδεικνύεται ότι και ο προμηθευτής αντιμετωπίζει ακριβώς την ίδια διαδικασία ζήτησης, όπως διαπιστώνει και ο Graves (1999). Ύστερα από τη χρήση κατάλληλων οικονομετρικών αποδείξεων και προσομοιώσεων για διάφορα μεγέθη δείγματος, εξήχθησαν πολύ σημαντικά συμπεράσματα που αναφέρονται στις παραμέτρους θ και γ των υποδειγμάτων ζήτησης του λιανοπωλητή και προμηθευτή αντίστοιχα, αλλά και στην τιμή που λαμβάνει το φαινόμενο BW, αποδεικνύοντας το όφελος του προμηθευτή να συνεργαστεί με τον λιανοπωλητή για τον διαμοιρασμό των πληροφοριών, ίσως αγοράζοντας αυτές, ή να πραγματοποιήσει κατάλληλες προβλέψεις για τη μελλοντική ζήτηση που θα κληθεί να ικανοποιήσει. Να αναφερθεί ότι για κάθε συνδυασμό παραμέτρων, παράχθηκε μία χρονολογική σειρά δείγματος ($n = 50, 100, 200$) και εκτελέστηκαν 1000 επαναλήψεις. Τα αποτελέσματα, τα οποία αναφέρονται στις τιμές των γ , θ , και BW αποτελούν τους μέσους των 1000 επαναληπτικών διαδικασιών.

Στην αρχική φάση εκτίμησης της παραμέτρου γ , η οποία εμπεριέχεται στο υπόδειγμα της ζήτησης που αντιμετωπίζει ο προμηθευτής, παρατηρείται ότι το ρίσκο πρόβλεψης του προμηθευτή λαμβάνει την τιμή του 2% για $n=50$ και του 1% για $n=100$ και $n=200$. Ειδικότερα, όταν ο προμηθευτής έχει διαθέσιμο μέγεθος δείγματος 50 παρατηρήσεων για όλους τους εφικτούς συνδυασμούς της παραμέτρου γ , ο μέσος εκτιμητής $\hat{\gamma}$ παρουσιάζει την μεγαλύτερη απόκλιση από την πραγματική τιμή του σε σχέση με τα άλλα μεγέθη δείγματος που λαμβάνονται. Ο μέσος εκτιμητής $\hat{\gamma}$ δεν είναι αμερόληπτος, έτσι ώστε ο μέσος όρος των εκτιμήσεων να ισούται με την πραγματική τιμή της παραμέτρου.

Σε καμία περίπτωση μεταβολής των παραμέτρων, γ και θ , δεν θα μπορούσαμε να υποθέσουμε, χωρίς να εξεταστεί, ότι αφού το ρίσκο πρόβλεψης για την μέση εκτιμημένη τιμή της παραμέτρου γ είναι, όπως προαναφέρθηκε πολύ μικρό (0% - 2%) για όλα τα δείγματα, τότε και το ρίσκο πρόβλεψης της παραμέτρου θ θα είναι εξίσου μικρό. Τα συμπεράσματα της ανάλυσης, τα οποία προέκυψαν αποδεικνύουν ότι το ρίσκο πρόβλεψης της παραμέτρου θ ποικίλει και διαφοροποιείται, ανάλογα με τον αριθμό του δείγματος των παραγγελιών του λιανοπωλητή, τις οποίες χρησιμοποιεί κάθε φορά ο προμηθευτής στην πρόβλεψή του.

Γενικά, παρατηρείται ότι καθώς το δείγμα που χρησιμοποιεί ο προμηθευτής για τη διενέργεια της πρόβλεψης αυξάνεται, το ρίσκο πρόβλεψης μειώνεται. Πιο συγκεκριμένα, όταν ο προμηθευτής διενεργεί πρόβλεψη χρησιμοποιώντας δείγμα 50 παρατηρήσεων, το ρίσκο πρόβλεψης της παραμέτρου θ είναι αρκετά υψηλό για εξαχθείσες μέσες εκτιμημένες τιμές ίσες με -0.4638, -0.0849, -0.0633, 0.5681 και 1.5295. Για τις μέσες αυτές τιμές εκτίμησης του θ , το ρίσκο πρόβλεψης κυμαίνεται από 7.24% - 131.65%, τονίζοντας πως ο προμηθευτής οφείλει να συνεργαστεί με τον λιανοπωλητή, προκειμένου να υπάρξει μία μορφή ανταλλαγής πληροφοριών (Information Sharing) σχετικά με τη ζήτηση των καταναλωτών. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι για πραγματική τιμή του θ ίση με 0.8, η μέση εκτιμημένη ισούται με 1.529, γεγονός το οποίο την καθιστά εκτός του πεδίου ορισμού της. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας των εκτιμημένων τιμών της γ , οι οποίες και αυτές εκτιμώνται εκτός πεδίου ορισμού της, αποτέλεσμα 424 παλινδρομήσεων, οδηγώντας σε υπερβολικά ακραίες τιμές την εκτίμηση του θ . Αντίθετα, όταν η μέση εκτιμημένη τιμή του θ είναι ίση με -0.8043, η οποία αντιστοιχεί σε ρίσκο πρόβλεψης της τάξεως του 0.45%, τότε ο προμηθευτής είναι ικανός να προβλέψει με επαρκή ακρίβεια την ζήτηση του λιανοπωλητή, χωρίς την ανταλλαγή πληροφορίας.

Στην περίπτωση που ο προμηθευτής έχει στην διάθεση του δείγμα 100 παραγγελιών του λιανοπωλητή και πραγματοποιεί πρόβλεψη της ζήτησής του για μελλοντικές χρονικές περιόδους, χωρίς καμία άλλη πληροφορία σχετικά με τη ζήτηση που αντιμετωπίζει ο λιανοπωλητής, το ρίσκο πρόβλεψης ποικίλει από 0.65% έως και 49.89%. Γίνεται σαφής η μείωση του ρίσκου πρόβλεψης αμέσως μετά την αύξηση του δείγματος.

Όταν η μέση τιμή του εκτιμημένου θ ισούται με -0.8052 και -0.4885, οι οποίες αντιστοιχούν σε πραγματικές τιμές -0.8 και -0.5, τότε το ρίσκο πρόβλεψης είναι αρκετά μικρό, 0.65% και 2.3%, αντίστοιχα, με αποτέλεσμα να καθίσταται ικανή η ακρίβεια των τυχών προβλέψεων και εκτιμήσεων. Αντίθετα, οποιοδήποτε άλλο αποτέλεσμα εκτίμησης της παραμέτρου θ οδηγεί σε αρκετά υψηλά σφάλματα πρόβλεψης, της τάξεως του 19.03% έως

49.89%, προτείνοντας την ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ των μελών της εφοδιαστικής αλυσίδας. Εδώ, αξίζει να σημειωθεί ότι για πραγματική τιμή του θ ίση με 0.8, η μέση εκτιμημένη ισούται με 1.0708, γεγονός το οποίο την καθιστά εκτός του πεδίου ορισμού της. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας των εκτιμημένων τιμών της γ , οι οποίες και αυτές εκτιμώνται εκτός πεδίου ορισμού της, αποτέλεσμα 397 παλινδρομήσεων, οδηγώντας σε υπερβολικά ακραίες τιμές την εκτίμηση του θ .

Επίσης, ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εκτιμήσεις της παραμέτρου θ , οι οποίες πραγματοποιούνται για μέγεθος δείγματος $n=200$. Τα ποσοστά ρίσκου πρόβλεψης τείνουν να μειωθούν και κάτω του 0.5% για τιμές εκτίμησης $\hat{\theta}$ ίσες με -0.8033 και -0.4993, όταν οι πραγματικές τιμές είναι -0.8 και -0.5, αντίστοιχα. Συνεπώς, η διενέργεια πρόβλεψης καθίσταται εφικτή και ακόμα πιο ακριβής σε σχέση με τα άλλα δείγματα λήψης. Εξίσου μικρό ποσοστό ρίσκου πρόβλεψης (4.4%) εμφανίζεται όταν το $\hat{\theta} = -0.1912$, ενώ η πραγματική τιμή είναι -0.2. Τέλος, αν ο προμηθευτής εκτιμήσει παράμετρο θ ίση με -0.228, 0.5509 και 0.8834, τότε προτάσσεται η ανταλλαγή της πληροφορίας, καθώς το ρίσκο λάθους της πρόβλεψης κυμαίνεται από 10.18% έως 14.02%, αντίστοιχα.

Κρίνεται επιβεβλημένη η αναφορά στην κανονικότητα των κατανομών που ακολουθούν οι εκτιμημένες τιμές των γ και θ , σύμφωνα με το κριτήριο Jarque – Bera. Για μέγεθος δείγματος $n=50$ προκύπτει μόνο μία κανονική κατανομή, η οποία αποδίδει μέση εκτιμημένη τιμή $\hat{\gamma}$ ίση με -0.6788. Επιπλέον, η αύξηση του δείγματος σε $n=100$ και $n=200$, μετατρέπει τις κατανομές σε κανονικές, με εξαίρεση αυτές που αποδίδουν μέση εκτιμημένη τιμή $\hat{\gamma}$ ίση με -0.672 και -0.8379, αντίστοιχα. Τέλος, όλες οι κατανομές των εκτιμημένων θ σε όλα τα εξεταζόμενα δείγματα δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή, γεγονός που αυξάνει έμμεσα το ρίσκο πρόβλεψης, καθώς κάποιες τιμές του εκτιμημένου θ είναι ακραίες, ενώ κάποιες όχι. Συνεπώς, όπως αποδεικνύεται και από την τιμή της τυπικής απόκλισης στα ιστογράμματα του παραρτήματος, τα σύνολα διαφέρουν ως προς την αντιπροσωπευτικότητα του εκτιμημένου αριθμητικού μέσου.

Η ποσοτικοποίηση του μεταβλητού χρονικά bullwhip effect συμπεραίνει ότι για μέγεθος δείγματος $n=50$, 100, 200, το οποίο αντιστοιχεί στο χρόνο t του τύπου, το φαινόμενο υφίσταται σε πολύ μικρό βαθμό, αφού $BW_t > 1$. Το ρίσκο πρόβλεψης κυμαίνεται σε απόλυτες τιμές κάτω του 1% για $n=50$, 2% για $n=100$ και 0.05% $n=200$. Οποιοσδήποτε πληροφορίες σχετικά με την τάση του φαινομένου δεν είναι εφικτές να αποτυπωθούν σε τόσο μικρό αριθμό

επαναληπτικών διαδικασιών που λήφθηκε. Τέλος, να σημειωθεί ότι η αύξηση του δείγματος οδήγησε, όπως ήταν αναμενόμενο, σε καλύτερες εκτιμήσεις.

Το υπόδειγμα δύο σταδίων που θεωρήθηκε, λιανοπωλητής – προμηθευτής, παρέχει κάποιες πληροφορίες για τη συμπεριφορά μίας εφοδιαστικής αλυσίδας. Το γεγονός ότι η ανάλυση του λιανοπωλητή φαίνεται να είναι ίδια με αυτή του προμηθευτή, ίσως αποτελεί δομικό στοιχείο για την ανάλυση πιο σύνθετων συστημάτων εφοδιαστικής αλυσίδας. Ωστόσο, υπάρχουν πολλά αναπάντητα ερωτήματα και ανοιχτά θέματα, τα οποία αξίζει να συζητηθούν. Η παρούσα εργασία εξέτασε την πιο απλή μορφή μίας μη στάσιμης χρονολογικής σειράς στην απλούστερη αποθεματική πολιτική. Θα μπορούσε σίγουρα να γίνει πιο ενδιαφέρουσα ενισχύοντας το υπόδειγμα ή ως προς το μοντέλο της εξωγενούς ζήτησης που υποθέσαμε ή μεταβάλλοντας το περιεχόμενο της αποθεματικής πολιτικής ή και τα δύο ταυτόχρονα. Για παράδειγμα, τί θα συμβεί αν οι χρόνοι παράδοσης της παραγγελίας είναι στοχαστικοί; Τί θα συμβεί αν το υπόδειγμα της εξωγενούς ζήτησης μεταβληθεί ως προς την τάξη ολοκλήρωσης είτε ως προς την τάξη υστερήσεων του σφάλματος; Επιπλέον, μια επέκταση ως προς το περιεχόμενο θα αποτελούσε η εισαγωγή των διαφόρων μορφών κόστους αποθεματοποίησης και η σύγκρισή τους με πραγματικά δεδομένα. Να σημειωθεί ότι τα ανωτέρω ερωτήματα δεν έχουν απαντηθεί μέχρι σήμερα και οποιαδήποτε συνεισφορά στην ανάπτυξη της παρούσας γνώσης, στο τομέα της πρόβλεψης αποθεμάτων με μη στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες, θεωρείται σημαντική.

Αρθρογραφία – Βιβλιογραφία

- Aggarwal, S. (1974), 'A Review of Current Inventory Theory and Its Applications', International Journal of Production Research, Vol 12, pp. 443-472
- Ali, M. M., Boylan, J. E., Syntetos, A. A. (2011), 'Forecast errors and inventory performance under forecast information sharing', International Journal of Forecasting, Volume 28, Issue 4, October–December 2012, Pages 830-841
- Arrow, K.J., Harris, T. and Marshak, J. (1951). 'Optimal inventory policy', Econometrica 19, 250-272
- Arrow, K.J., Karlin, S. and Scarf, H.E. (Eds.). (1958), 'Studies in Applied Probability and Management Science', Stanford University Press, Stanford, CA.
- Arrow, K.J., Karlin, S. and Scarf, H.E. (Eds.). (1958), 'Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production', Stanford University Press, Stanford, CA.
- Babai, M. Z., Ali, M. M., Boylan, J. E., & Syntetos, A. A. (2013), 'Forecasting and inventory performance in a two-stage supply chain with ARIMA(0,1,1) demand: Theory and empirical analysis', International Journal of Production Economics, 143, 463-471
- Babai, M.Z., Ali, M.M., Boylan, J.E., Syntetos, A.A. (2011), 'Forecasting and inventory performance in a two-stage supply chain with ARIMA(0,1,1) demand: Theory and empirical analysis', International Journal of Production Economics, Volume 143, Issue 2, June 2013, Pages 463-471
- Bagnha, M.P., Cohen, M.A. (1995), 'The stabilizing effect of inventory in supply chains', Management Science 46 (3), 463-443
- Bellman, R., Glickberg, I., Gross, O. (1955), 'On the optimal inventory equation', Management Science 2, pp. 83-104
- Blanchard, O.J. (1983), 'The production and inventory behavior of the American automobile industry', J. Polit. Econ., Vol 91, 3 365-400
- Blinder, A.S. (1986), 'Can the production smoothing model of inventory behavior be saved?', Q. J. Econ., Vol 101, 3, 431-454

- Bourland, K., S. Powell, D. Pyke. (1996), 'Exploring timely demand information to reduce inventory', *European Journal of Operational Researches*, Vol 92. 239-253
- Box, G. E. P., and G. M. Jenkins. (1970), 'Time Series Analysis, Forecasting and Control', Holden-Day, San Francisco
- Box, G. E. P., G. M. Jenkins, and G. C. Reinsel. (1994), 'Time Series Analysis, Forecasting and Control', 3rd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Brown, R.G. (1959), 'Statistical Forecasting for Inventory Control', McGraw-Hill, New York
- Brown, R.G. (1967), 'Decision Rules for Inventory Management', Holt, Rinehart and Winston, New York.
- Cachon, G., M. Fisher. (1997), 'Supply Chain Inventory Management and the Value of Shared Information', Working Paper, Wharton School, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA.
- Cavinato (1992), 'A Total Cost/Value Model for Supply Chain Competitiveness', *Journal of Business Logistics*, (13: 2), pp 285-301
- Charnes, J.M., Marmorstein, H., Zinn, W. (1995), 'Safety Stock Determination with correlated demand in a Periodic – Review Inventory System', *Journal of the Operation Research Society* 46: 1006 – 1013
- Chen, F., Drezner, Z., Ryan, J.K., Simchi-Levi, D. (2000), 'Quantifying the bullwhip effect in a simple supply chain: the impact of forecasting, lead times and information', *Management Science* 46, 436-443
- Chen, F., Drezner, Z., Ryan, L.K., Simchi-Levi, D. (2000), 'Quantifying the bullwhip effect in a simple supply chain', *Management Science* 46(3), 436-443
- Chen, F., Drezner, Z., Ryan, L.K., Simchi-Levi, D. (2000), 'The impact of exponential smoothing forecast on the bullwhip effect', *Naval Research Logistics* 47, 269-286
- Chen, F., Drezner, Z., Ryan, J. K., & Simchi-Levi, D. (2000), 'Quantifying the bullwhip effect in a simple supply chain: the impact off forecasting, lead times, and information', *Management Science*, 46, 436-443
- Cheng, T.C.E., Wu, Y.N. (2005), 'The impact of information sharing in a two level supply chain with multiple retailers', *Journal of the operational Research Society*, Vol 56, 1159-1165

Chopra S. and Meindl's (2001), 'Supply Chain Management: Strategy, Planning, and Operation', Prentice Hall of India

Christopher M. (1998), 'Logistics & Supply Chain Management: Strategies for Reducing Costs and Improving Services', Pitman Publishing, London

Croom S., Romano P, and Giannakis M. (2000), 'Supply Chain Management: An Analytical Framework for Critical Literature Review', European Journal of Purchasing and Supply Management, (6: 1), pp. 67-83

Dvoretzky, A., Kiefer, J. and Wolfowitz, J. (1952), 'The inventory problem I: Case of known distributions of demand', Econometrica 20, 187-222

Dvoretzky, A., Kiefer, J. and Wolfowitz, J. (1952), 'The inventory problem II: Case of unknown distributions of demand', Econometrica 20, 450-466.

Dvoretzky, A., Kiefer, J. and Wolfowitz, J. (1953), 'On the optimal character of (s,S) policy in inventory theory', Econometrica 20, 586-596

Eilon, S. and Lampkin, W. (1968), 'Inventory Control Abstracts (1953-1965)', Oliver & Boyd, Edinburgh

Erkip, N., Hausman, W. H., Nahmias, S. (1990), 'Optimal centralized ordering policies in multi-echelon inventory systems with correlated demands', Management Science, Vol 36(3), pp. 381-392

Forrester, J. W. (1958), 'Industrial dynamics – A major breakthrough for decision making', Harvard Business Rev., Vol 36(4) 37-66

Forrester, J. W. (1961), 'Industrial Dynamics', MIT Press, Cambridge, MA.

Gallagher, H.P., Morse, P.M. and Simond, M. (1959), 'Dynamics of two classes of continuous-review inventory systems', Operations Research 7(3), 362-384

Ganeshan, R, and Harrison Terry P. (1995), 'An Introduction to Supply Chain Management', Department of Management Sciences and Information Systems

Gavirneni, S., R., Kapuscinski, S. Tayur. (1999), 'Value of information in capacitated supply chains', Management science 45(1) 16-24

- Gilbert, K. (2005), 'An ARIMA Supply Chain Model', *Management Science*, Vol. 51, No. 2, pp. 305-310
- Goodman, M. (1974), 'A new look at higher-order exponential smoothing for forecasting'. *Operations Research* 22 (4),880-888
- Graves, S. C. (1999), 'A Single-Item Inventory Model for a Nonstationary Demand Process', *Manufacturing & Service Operations Management*, Vol. 1, No. 1
- Hadley, G. and Whitin, T.M. (1963), 'Analysis of Inventory Systems', Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J
- Hammond (1995), 'Barilla Spa (A), (B), (C), and (D)', Harvard Business School Case, Boston, MA.
- Hammond, J. (1993), 'Quick response in retail/manufacturing channels. Globalization, Technology and Competition: The fusion of Computers and Telecommunication in the 1990's', Harvard Business Scholl Press, Boston, MA. 185-214
- Handfield R. B. and Nichols E. L. (1999), 'Introduction to Supply Chain Management', Prentice-Hall, New Jersey, 1999, pp. 1-183
- Harris, F. (1915) 'Operations and Cost', A.W. Shaw Co Factory Management Series, Chicago
- Holt, C. C. (1957), 'Forecasting Seasonals and Trends by Exponentially Weighted Moving Averages', ONR Memorandum No. 52, Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, Pennsylvania
- Jain, J., Dangayach, G. S., Agarwal, G., Soumya Banerjee. (2010), 'Supply Chain Management: Literature Review and Some Issues', *Journal of Studies on Manufacturing* Vol.1-2010/Iss.1 pp. 11-25
- Jonhson, G. D., Thompson H. E. (1975), 'Optimality of myopic inventory policies for certain dependent processes', *Management Science* 21(11), pp. 1303-1307
- Kahn, J. (1987), 'Inventory and the volatility of production', *American Economic Review*, Vol 77. 667-679
- Karr, H.W. and Geisler, M.A. (1956), 'A fruitful application of static margin analysis', *Management Science* 2(4), 313-326

- Kim, J. G., Chatfield, D., Harrison, T. P., & Hayya, J. C. (2006), 'Quantifying the bullwhip effect in a supply chain with stochastic lead time', *European Journal of Operational Research*, 173, 617-636
- Lambert, D. (2004), 'The Eight Essential Supply Chain Management Processes', *Supply Chain Management Review*, Vol. 8, No. 6, pp. 18-26
- Lee Hau L., and Corey Billington. (1995), 'The Evolution of Supply-Chain-Management Models and Practice at Hewlett-Packard', *Interfaces*, Vol 25 pp. 42-63: 5
- Lee, H. L., P. Padmanabhan, S. Whang. (1997), 'Bullwhip effect in a supply chain', *Sloan Management Rev.* 38 (Spring). 93-102
- Lee, H. L., P. Padmanabhan, S. Whang. (1997), 'Information distortion in a supply chain: The bullwhip effect', *Management Science*, 43, 54-558
- Lee, H.L., Billington, C. (1995), 'The evolution of supply-chain-management models and practice at Hewlett-Packard', *Interfaces*, Vol. 25, No. 5, pp. 42-63
- Lee, H.L., Padmanabhan, P., Whang, S. (1997), 'Information distortion in a supply chain: The bullwhip effect', *Management Science* 43, 546-558
- Lee, H.L., SO, K.C., Tang, C.S. (2000), 'The value of information sharing in a two-level supply chain', *Management Science* 46(2), 626-643
- Li, G., Wang, S., Yu, G., & Yan, H. (2005), 'Information transformation in a supply chain: a simulation study', *Computers and Operations Research*, Vol 32,707-725
- Luong, H. T., & Phien, N. H. (2007), 'Measure of bullwhip effect in supply chains: the case of high order autoregressive demand process', *European Journal of Operational Research*, 183. 197-209
- McCuller, P., & Towill, D. R. (2002), 'Diagnosis and reduction of bullwhip effect in a supply chain', *Supply Chain Management: An International Journal*, 7, 164-179
- Mentzer J. T., DeWitt V., Keebler K. S., Min S., Nix N. W., Smith. C. D. (2001), 'Defining Supply Chain Management', *Journal of Business Logistics*
- Michna, Z., Nielsen, I. E., Nielsen. P. (2013), 'The Bullwhip Effect in supply chains with stochastic lead times', *Mathematical Economics*, No. 9 (16)

- Movahedi, B., Lavassani, K. and Kumar, V. (2009), 'Transition to B2B e-Marketplace Enabled Supply Chain: Readiness Assessment and Success Factors', *The International Journal of Technology, Knowledge and Society*, 5 (3): 75–88
- Muth, J. F. (1960), 'Optimal properties of exponentially weighted forecasts', *American Statistic Association J.*, Vol 55, pp.299-306
- Naddor, E. (1966), 'Inventory Systems', John Wiley and Sons, New York
- Novack R. A. and Simco S. W. (1991), 'The industrial procurement process: a supply chain perspective', *Journal of Business Logistics*, (12: 1), pp. 145-67
- Raghunathan, S. (2003), 'Impact of demand correlation on the value of and incentives for information sharing in a supply chain', *European Journal of Operational Research* 146, 634-649
- Scarf, H.E. (1959), 'Bayes solution of the statistical inventory problem', *Annals of Mathematical Statistics* 30, 490-508
- Scarf, H.E. (1959), 'The optimality of (S, s) policies in the dynamic inventory problem', *Mathematical Methods in the Social Sciences*, 196-202
- Scarf, H.E., Gilford, D.M., Shelly, M.W. (1963), 'A survey of analytic techniques in inventory theory, Multistage inventory models and techniques', Stanford University Press, Stanford, California
- Scott, C., Westbrook, R. (1991), 'New Strategic Tools for Supply Chain Management', *International Journal of Physical Distribution & Logistics Management*, (21: 1), pp 23-33
- Silver, E. A., D. Pyke, and R. Peterson. (1998), 'Inventory Management and Production Planning and Scheduling', 3rd edition, Wiley, New York
- Silver, E.A., (2008). 'Inventory Management: An Overview, Canadian Publications, Practical Applications and Suggestions for Future Research', *INFOR*, 46(1): 15-28
- Silver, E.A., Meal, H.C., (1973), 'A heuristic for selecting lot size quantities for the case of a deterministic time-varying demand rate and discrete opportunities for replenishment, Production and inventory management', *Journal of the American Production and Inventory Control Society*, Vol. 14.1973, 2, p. 64-74

- Simpson, K. (1959), 'A theory of allocation of stocks to warehouses', *Operations Research* 7(6), 796-805
- Song J., Zipkin P. (1993), 'Inventory control in a fluctuating demand environment', *Oper. Res.*, Vol 41, pp. 351-370
- Taft, E.W. (1918). 'The Most Economical Production Lot', *Iron Age*, 101: 1410-1412
- Towill D. R., N. M. Naim and J. Wikner. (1992), 'Industrial Dynamics Simulation Models in the Design of Supply Chains', *International Journal of Physical Distribution and Logistics Management*, (22: 5), pp. 3-1
- Veinott, A. (1965), 'Optimal policy for a multi-product, dynamic, nonstationary inventory problem', *Management Science* 12, pp. 206-222
- Wagner, H.M. (1962), 'Statistical Management of Inventory Systems', John Wiley and Sons, New York
- Wagner, H.M. and Whitin, T.M. (1958), 'Dynamic version of the economic lot size model', *Management Science* 5, 89-96.
- Wilson, R. H. (1934). 'A scientific routine for stock control'. *Harvard Business Review*, 13:116–128
- Winters, P. R. (1960), 'Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages', *Management Science*, 6, 324-342
- Wisner J. D. And K. C. Tan. (2000), 'Supply Chain Management and Its Impact on Purchasing', *The Journal of Supply Chain Management*, (36: 4), pp. 33-42
- Wong, C. Y., El-Beheiry, M. M., Johansen, J., & Hvolby, H.-H. (2007), 'The implications of information sharing on bullwhip effects on a toy supply chain', *International Journal of Risk Assessment and Management*, 7, 4-18
- Yu, Z., H., Cheng, T.C.E. (2002), 'Modelling the benefits of information sharing based partnerships in a two level supply chain', *Journal of the Operational Research Society*, Vol 53, 436-446
- Zhang, X. (2004), 'The impact of forecasting methods on the bullwhip effect', *International Journal of Economics*, 88 (15-27)

Παράρτημα

Απόδειξη της σχέσης (6)

Χρησιμοποιώντας την (1) επαναληπτικά λαμβάνεται ότι :

$$d_t = d_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$d_{t+1} = d_t + \theta \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}$$

$$d_{t+2} = d_{t+1} + \theta \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} = d_t + \theta \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1} + \theta \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \Leftrightarrow$$

$$d_{t+2} = d_t + \theta(\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}$$

$$d_{t+3} = d_{t+2} + \theta \varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3} = d_t + \theta(\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \theta \varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3} \Leftrightarrow$$

$$d_{t+3} = d_t + \theta(\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}) + (\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3})$$

$$\dots = \dots \dots \dots$$

$$d_{t+m} = d_t + \theta(\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \dots + \varepsilon_{t+m-2} + \varepsilon_{t+m-1}) + (\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3} + \dots + \varepsilon_{t+m-2} + \varepsilon_{t+m-1} + \varepsilon_{t+m}) \Leftrightarrow$$

$$d_{t+m} = d_t + \theta \varepsilon_t + \varepsilon_{t+m} + \theta(\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \dots + \varepsilon_{t+m-2} + \varepsilon_{t+m-1}) + (\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3} + \dots + \varepsilon_{t+m-2} + \varepsilon_{t+m-1}) \Leftrightarrow$$

$$d_{t+m} = d_t + \theta \varepsilon_t + \varepsilon_{t+m} + (1 + \theta) \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_{t-j}$$

Απόδειξη της σχέσης (9)

Χρησιμοποιώντας την (7) λαμβάνεται ότι :

$$\hat{D}_{t|H_t} = \sum_{m=1}^{L_R} \hat{d}_{t+m|H_t} = \sum_{m=1}^{L_R} E(d_{t+m|H_t}) = \sum_{m=1}^{L_R} E(d_t + \theta \varepsilon_t + \varepsilon_{t+m} + (1 + \theta) \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_{t-j}) = \sum_{m=1}^{L_R} (d_t + \theta \varepsilon_t) = \sum_{m=1}^{L_R} d_t + \sum_{m=1}^{L_R} \theta \varepsilon_t = L_R d_t + L_R \theta \varepsilon_t = L_R (d_t + \theta \varepsilon_t)$$

Απόδειξη της σχέσης (10)

Χρησιμοποιώντας την (8) λαμβάνεται ότι :

$$V_{t|H_t} = \text{Var}(\sum_{m=1}^{L_R} e_{t+m|H_t}^{(R)}) = \text{Var}\{\sum_{m=1}^{L_R} \varepsilon_{t+m} + (1 + \theta) \sum_{m=1}^{L_R} \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_{t-j}\}$$

Όπου,

- $\sum_{m=1}^{L_R} \varepsilon_{t+m} = \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \dots + \varepsilon_{t+(L_R-2)} + \varepsilon_{t+(L_R-1)} + \varepsilon_{t+L_R}$.
- $(1 + \theta) \sum_{m=1}^{L_R} \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_{t-j} = (1 + \theta) \{(\varepsilon_{t+1}) + (\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}) + (\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3}) + \dots + (\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3} + \dots + \varepsilon_{t+(L_R-1)})\} = (1 + \theta) \{(L_R - 1)\varepsilon_{t+1} + (L_R - 2)\varepsilon_{t+2} + (L_R - 3)\varepsilon_{t+3} + \dots + \{L_R - (L_R - 1)\}\varepsilon_{t+(L_R-1)}\} = (1 + \theta) \sum_{m=1}^{L_R-1} m \varepsilon_{t+L_R-m}$.
- $\sum_{m=1}^{L_R} \varepsilon_{t+m} + (1 + \theta) \sum_{m=1}^{L_R} \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_{t-j} = \sum_{m=1}^{L_R} \varepsilon_{t+m} + (1 + \theta) \sum_{m=1}^{L_R-1} m \varepsilon_{t+L_R-m} = (\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \dots + \varepsilon_{t+(L_R-2)} + \varepsilon_{t+(L_R-1)} + \varepsilon_{t+L_R}) + (1 + \theta) \{\varepsilon_{t+L_R-1} + 2\varepsilon_{t+L_R-2} + 3\varepsilon_{t+L_R-3} + \dots + (L_R - 2)\varepsilon_{t+L_R-(L_R-2)} + (L_R - 1)\varepsilon_{t+L_R-(L_R-1)}\} = \varepsilon_{t+L_R} + \{1 + (1 + \theta)\}\varepsilon_{t+L_R-1} + \{1 + 2(1 + \theta)\}\varepsilon_{t+L_R-2} + \{1 + 3(1 + \theta)\}\varepsilon_{t+L_R-3} + \dots + \{1 + (L_R-1)(1 + \theta)\}\varepsilon_{t+L_R-(L_R-1)} = \sum_{m=0}^{L_R-1} \{1 + (1 + \theta)m\}\varepsilon_{t+L_R-m}$.

Άρα:

$$\sum_{m=1}^{L_R} \varepsilon_{t+m} + (1 + \theta) \sum_{m=1}^{L_R} \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_{t-j} = \sum_{m=0}^{L_R-1} \{1 + (1 + \theta)m\}\varepsilon_{t+L_R-m}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} V_{t|H_t} &= \text{Var}(\sum_{m=1}^{L_R} e_{t+m|H_t}^{(R)}) = \text{Var}\{\sum_{m=1}^{L_R} \varepsilon_{t+m} + (1 + \theta) \sum_{m=1}^{L_R} \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_{t-j}\} = \text{Var}(\sum_{m=0}^{L_R-1} \{1 + (1 + \theta)m\}\varepsilon_{t+L_R-m}) \\ &= \sum_{m=0}^{L_R-1} \{1 + (1 + \theta)m\}^2 \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \{1 + (1 + \theta)\}^2 \sigma_\varepsilon^2 + \{1 + 2(1 + \theta)\}^2 \sigma_\varepsilon^2 + \{1 + 3(1 + \theta)\}^2 \sigma_\varepsilon^2 + \dots + \{1 + (L_R - 1)(1 + \theta)\}^2 \sigma_\varepsilon^2 = \\ &\sigma_\varepsilon^2 \{1 + \{(1 + \theta)^2 + 2(1 + \theta) + 1\} + \{2(1 + \theta)\}^2 + 4(1 + \theta) + 1\} + \{3(1 + \theta)\}^2 + 6(1 + \theta) + 1\} + \dots + \{(L_R - 1)(1 + \theta)\}^2 + 2(L_R - 1)(1 + \theta) + 1\} = \sigma_\varepsilon^2 \{1 + (L_R - 1) + \{2(1 + \theta) + 4(1 + \theta) + 6(1 + \theta) + \dots + 2(L_R - 1)(1 + \theta)\} + \{(1 + \theta)^2 + \{2(1 + \theta)\}^2 + \{3(1 + \theta)\}^2 + \dots + \{(L_R - 1)(1 + \theta)\}^2\} \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \{L_R + L_R(L_R - 1)(1 + \theta) + \frac{L_R(L_R - 1)(2L_R - 1)}{6} (1 + \theta)^2\} = \sigma_\varepsilon^2 \{L_R + L_R(L_R - 1)(1 + \theta) + \frac{L_R(L_R - 1)(2L_R - 1)}{6} (1 + \theta)^2\} \end{aligned}$$

$$V_{t|H_t} = \sigma_\varepsilon^2 \{L_R + L_R(L_R - 1)(1 + \theta) + \frac{L_R(L_R - 1)(2L_R - 1)}{6} (1 + \theta)^2\}$$

Απόδειξη της σχέσης (17)

Χρησιμοποιώντας την (15) και αντικαθιστώντας την (1) λαμβάνεται ότι :

$$\begin{aligned} q_t^{(R)} &= d_t + L_R(d_t + \theta \varepsilon_t) - L_R(d_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1}) = (L_R + 1)d_t + L_R \theta \varepsilon_t - L_R d_{t-1} - L_R \theta \varepsilon_{t-1} = (L_R + 1)(d_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) + L_R \theta \varepsilon_t - L_R(d_{t-2} + \theta \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) - L_R \theta \varepsilon_{t-1} = L_R d_{t-1} + L_R \theta \varepsilon_{t-1} + L_R \varepsilon_t \end{aligned}$$

$$+ d_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + L_R \theta \varepsilon_t - L_R d_{t-2} - L_R \theta \varepsilon_{t-2} - L_R \varepsilon_{t-1} - L_R \theta \varepsilon_{t-1} \Leftrightarrow q_t^{(R)} = q_{t-1}^{(R)} + (L_R + 1 + L_R \theta) \varepsilon_t + (\theta - L_R - L_R \theta) \varepsilon_{t-1}$$

Υποθέτουμε ότι:

$$(L_R + 1 + L_R \theta) \varepsilon_t = \{1 + L_R(1 + \theta)\} \varepsilon_t = \xi_t$$

Προκύπτει εύκολα ότι:

$$\begin{aligned} (\theta - L_R - L_R \theta) \varepsilon_{t-1} &= (\theta - L_R - L_R \theta + 1 - 1) \varepsilon_{t-1} = \{(1 + \theta) - L_R(1 + \theta) - 1\} \varepsilon_{t-1} = \{(1 + \theta) - (1 + L_R(1 + \theta))\} \varepsilon_{t-1} \\ &= \{1 + L_R(1 + \theta)\} \left\{ \frac{1 + \theta}{1 + L_R(1 + \theta)} - 1 \right\} \varepsilon_{t-1} = \{1 + L_R(1 + \theta)\} \varepsilon_{t-1} \left\{ \frac{1 + \theta}{1 + L_R(1 + \theta)} - 1 \right\} = \\ &\xi_{t-1}(\beta - 1), \text{ όπου } \beta = \frac{1 + \theta}{1 + L_R(1 + \theta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } q_t^{(R)} &= q_{t-1}^{(R)} + (L_R + 1 + L_R \theta) \varepsilon_t + (\theta - L_R - L_R \theta) \varepsilon_{t-1} = q_{t-1}^{(R)} + \xi_t + (\beta - 1) \xi_{t-1} \Leftrightarrow q_t^{(R)} = \\ &q_{t-1}^{(R)} + (\beta - 1) \xi_{t-1} + \xi_t \text{ ή } q_t^{(R)} = q_{t-1}^{(R)} + \gamma \xi_{t-1} + \xi_t, \text{ όπου } \gamma = \beta - 1 = \frac{\theta - L_R(1 + \theta)}{1 + L_R(1 + \theta)}, \xi_t = \{1 + L_R(1 + \theta)\} \varepsilon_t, \\ &\sigma_\xi^2 = \{1 + L_R(1 + \theta)\}^2 \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Απόδειξη της σχέσης (18)

Χρησιμοποιώντας την (17) επαναληπτικά λαμβάνεται ότι :

$$q_t^{(R)} = q_{t-1}^{(R)} + \gamma \xi_{t-1} + \xi_t$$

$$q_{t+1}^{(R)} = q_t^{(R)} + \gamma \xi_t + \xi_{t+1}$$

$$q_{t+2}^{(R)} = q_{t+1}^{(R)} + \gamma \xi_{t+1} + \xi_{t+2} = q_t^{(R)} + \gamma \xi_t + \xi_{t+1} + \gamma \xi_{t+1} + \xi_{t+2} \Leftrightarrow$$

$$q_{t+2}^{(R)} = q_t^{(R)} + \gamma(\xi_t + \xi_{t+1}) + \xi_{t+1} + \xi_{t+2}$$

$$q_{t+3}^{(R)} = q_{t+2}^{(R)} + \gamma \xi_{t+2} + \xi_{t+3} = q_t^{(R)} + \gamma(\xi_t + \xi_{t+1}) + \xi_{t+1} + \xi_{t+2} + \gamma \xi_{t+2} + \xi_{t+3} \Leftrightarrow$$

$$q_{t+3}^{(R)} = q_t^{(R)} + \gamma(\xi_t + \xi_{t+1} + \xi_{t+2}) + (\xi_{t+1} + \xi_{t+2} + \xi_{t+3})$$

$$\dots = \dots$$

$$\begin{aligned} q_{t+m}^{(R)} &= q_t^{(R)} + \gamma(\xi_t + \xi_{t+1} + \xi_{t+2} + \dots + \xi_{t+m-2} + \xi_{t+m-1}) + (\xi_{t+1} + \xi_{t+2} + \xi_{t+3} + \dots \\ &+ \xi_{t+m-2} + \xi_{t+m-1} + \xi_{t+m}) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$q_{t+m}^{(R)} = q_t^{(R)} + \gamma \xi_t + \xi_{t+m} + \gamma(\xi_{t+1} + \xi_{t+2} + \dots + \xi_{t+m-2} + \xi_{t+m-1}) + (\xi_{t+1} + \xi_{t+2} + \xi_{t+3} + \dots + \xi_{t+m-2} + \xi_{t+m-1}) \Leftrightarrow$$

$$q_{t+m}^{(R)} = q_t^{(R)} + \gamma \xi_t + \xi_{t+m} + (1 + \gamma) \sum_{j=1}^{m-1} \xi_{t-j}$$

Απόδειξη της σχέσης (21)

Χρησιμοποιώντας την (19) λαμβάνεται ότι :

$$\begin{aligned} \hat{Q}_t^{(S,IS)} &= \sum_{m=1}^{L_S} \hat{q}_{t+m}^{(R)} = \sum_{m=1}^{L_S} E(q_{t+m}^{(R)}) = \sum_{m=1}^{L_S} E(q_t^{(R)} + \gamma \xi_t + \xi_{t+m} + (1 + \gamma) \sum_{j=1}^{m-1} \xi_{t-j}) \\ &= \sum_{m=1}^{L_S} (q_t^{(R)} + \gamma \xi_t) = \sum_{m=1}^{L_S} q_t^{(R)} + \sum_{m=1}^{L_S} \gamma \xi_t = L_S q_t^{(R)} + L_S \gamma \xi_t = L_S (q_t^{(R)} + \gamma \xi_t) \end{aligned}$$

Απόδειξη της σχέσης (22)

Χρησιμοποιώντας την (20) λαμβάνεται ότι :

$$V_t^{(S,IS)} = \text{Var}(\sum_{m=1}^{L_S} e_{t+m}^{(S,IS)}) = \text{Var}\{\sum_{m=1}^{L_S} \xi_{t+m} + (1 + \gamma) \sum_{m=1}^{L_S} \sum_{j=1}^{m-1} \xi_{t-j}\}$$

Όπου,

- $\sum_{m=1}^{L_S} \xi_{t+m} = \xi_{t+1} + \xi_{t+2} + \dots + \xi_{t+(L_S-2)} + \xi_{t+(L_S-1)} + \xi_{t+L_S}$
- $(1 + \gamma) \sum_{m=1}^{L_S} \sum_{j=1}^{m-1} \xi_{t-j} = (1 + \gamma) \{(\xi_{t+1}) + (\xi_{t+1} + \xi_{t+2}) + (\xi_{t+1} + \xi_{t+2} + \xi_{t+3}) + \dots + (\xi_{t+1} + \xi_{t+2} + \xi_{t+3} + \dots + \xi_{t+(L_S-1)})\} = (1 + \gamma) \{(L_S - 1)\xi_{t+1} + (L_S - 2)\xi_{t+2} + (L_S - 3)\xi_{t+3} + \dots + \{L_S - (L_S - 1)\}\xi_{t+(L_S-1)}\} = (1 + \gamma) \sum_{m=1}^{L_S-1} m \xi_{t+L_S-m}$
- $\sum_{m=1}^{L_S} \xi_{t+m} + (1 + \gamma) \sum_{m=1}^{L_S} \sum_{j=1}^{m-1} \xi_{t-j} = \sum_{m=1}^{L_S} \xi_{t+m} + (1 + \gamma) \sum_{m=1}^{L_S-1} m \xi_{t+L_S-m} = (\xi_{t+1} + \xi_{t+2} + \dots + \xi_{t+(L_S-2)} + \xi_{t+(L_S-1)} + \xi_{t+L_S}) + (1 + \gamma) \{\xi_{t+L_S-1} + 2\xi_{t+L_S-2} + 3\xi_{t+L_S-3} + \dots + (L_S - 2)\xi_{t+L_S-(L_S-2)} + (L_S - 1)\xi_{t+L_S-(L_S-1)}\} = \xi_{t+L_S} + \{1 + (1 + \gamma)\} \xi_{t+L_S-1} + \{1 + 2(1 + \gamma)\} \xi_{t+L_S-2} + \{1 + 3(1 + \gamma)\} \xi_{t+L_S-3} + \dots + \{1 + (L_S-1)(1 + \gamma)\} \xi_{t+L_S-(L_S-1)} = \sum_{m=0}^{L_S-1} \{1 + (1 + \gamma)m\} \xi_{t+L_S-m}$

Άρα:

$$\sum_{m=1}^{L_S} \xi_{t+m} + (1 + \gamma) \sum_{m=1}^{L_S} \sum_{j=1}^{m-1} \xi_{t-j} = \sum_{m=0}^{L_S-1} \{1 + (1 + \gamma)m\} \xi_{t+L_S-m}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 V_t^{(S,IS)} &= \text{Var}(\sum_{m=1}^{L_S} e_{t+m}^{(S,IS)}) = \text{Var}\{\sum_{m=1}^{L_S} \xi_{t+m} + (1 + \gamma)\sum_{m=1}^{L_S} \sum_{j=1}^{m-1} \xi_{t-j}\} = \text{Var}(\sum_{m=0}^{L_S-1} \{1 + \\
 &(1 + \gamma)m\}\xi_{t+L_S-m}) = \sum_{m=0}^{L_S-1} \{1 + (1 + \gamma)m\}^2 \sigma_\xi^2 = \sigma_\xi^2 + \{1 + (1 + \gamma)\}^2 \sigma_\xi^2 + \{1 + 2(1 + \\
 &\gamma)\}^2 \sigma_\xi^2 + \{1 + 3(1 + \gamma)\}^2 \sigma_\xi^2 + \dots + \{1 + (L_S - 1)(1 + \gamma)\}^2 \sigma_\xi^2 = \sigma_\xi^2 \{1 + \{(1 + \gamma)^2 + 2(1 + \\
 &\gamma) + 1\} + \{2(1 + \gamma)\}^2 + 4(1 + \gamma) + 1\} + \{3(1 + \gamma)\}^2 + 6(1 + \gamma) + 1\} + \dots + \{(L_S - \\
 &1)(1 + \gamma)\}^2 + 2(L_S - 1)(1 + \gamma) + 1\} = \sigma_\xi^2 \{1 + (L_S - 1) + \{2(1 + \gamma) + 4(1 + \gamma) + 6(1 + \gamma) + \dots + \\
 &2(L_S - 1)(1 + \gamma)\} + \{(1 + \gamma)^2 + \{2(1 + \gamma)\}^2 + \{3(1 + \gamma)\}^2 + \dots + \{(L_S - 1)(1 + \gamma)\}^2\} = \sigma_\xi^2 \\
 &\{L_S + L_S(L_S - 1)(1 + \gamma) + \frac{L_S(L_S - 1)(2L_S - 1)}{6}(1 + \gamma)^2\} \Leftrightarrow \text{Var}(\sum_{m=1}^{L_S} q_{t+m}^{(R)}) = \sigma_\xi^2 \{L_S + L_S(L_S - \\
 &1)(1 + \gamma) + \frac{L_S(L_S - 1)(2L_S - 1)}{6}(1 + \gamma)^2\} \\
 V_t^{(S,IS)} &= \sigma_\xi^2 \{L_S + L_S(L_S - 1)(1 + \gamma) + \frac{L_S(L_S - 1)(2L_S - 1)}{6}(1 + \gamma)^2\}
 \end{aligned}$$

Απόδειξη της σχέσης (29)

Χρησιμοποιώντας την (17) επαναληπτικά λαμβάνεται ότι :

$$\begin{aligned}
 q_t^{(R)} &= q_{t-1}^{(R)} + \gamma \xi_{t-1} + \xi_t \Leftrightarrow \\
 q_t^{(R)} &= q_{t-2}^{(R)} + \gamma \xi_{t-2} + \xi_{t-1} + \gamma \xi_{t-1} + \xi_t = q_{t-2}^{(R)} + \gamma(\xi_{t-1} + \xi_{t-2}) + \xi_{t-1} + \xi_t \Leftrightarrow \\
 q_t^{(R)} &= q_{t-3}^{(R)} + \gamma \xi_{t-3} + \xi_{t-2} + \gamma(\xi_{t-1} + \xi_{t-2}) + \xi_{t-1} + \xi_t = q_{t-3}^{(R)} + \gamma(\xi_{t-1} + \xi_{t-2} + \xi_{t-3}) + \xi_{t-2} + \\
 &\xi_{t-1} + \xi_t \Leftrightarrow \\
 q_t^{(R)} &= q_{t-4}^{(R)} + \gamma \xi_{t-4} + \xi_{t-3} + \gamma(\xi_{t-1} + \xi_{t-2} + \xi_{t-3}) + \xi_{t-2} + \xi_{t-1} + \xi_t = q_{t-4}^{(R)} + \gamma(\xi_{t-4} + \xi_{t-3} + \\
 &\xi_{t-2} + \xi_{t-1}) + \xi_{t-3} + \xi_{t-2} + \xi_{t-1} + \xi_t \Leftrightarrow \\
 &\dots = \dots \Leftrightarrow \\
 &\dots \Leftrightarrow \\
 q_t^{(R)} &= q_{t-(t-1)}^{(R)} + \gamma(\xi_{t-(t-1)} + \xi_{t-(t-2)} + \xi_{t-(t-3)} + \dots + \xi_{t-2} + \xi_{t-1}) + (\xi_{t-(t-1)+1} + \\
 &\xi_{t-(t-1)+2} + \xi_{t-(t-1)+3} + \dots + \xi_{t-2} + \xi_{t-1} + \xi_t) \Leftrightarrow \\
 q_t^{(R)} &= q_1^{(R)} + \gamma(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{t-2} + \xi_{t-1}) + (\xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{t-2} + \xi_{t-1} + \xi_t) \Leftrightarrow \\
 q_t^{(R)} &= \mu + \xi_1 + \theta(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{t-2} + \xi_{t-1}) + (\xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{t-2} + \xi_{t-1} + \xi_t) \Leftrightarrow \\
 q_t^{(R)} &= \mu + \xi_t + \gamma(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{t-2} + \xi_{t-1}) + (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{t-2} + \xi_{t-1}) \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$q_t^{(R)} = \mu + \xi_t + (1 + \gamma)(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_{t-2} + \xi_{t-1}) \Leftrightarrow$$

$$q_t^{(R)} = \mu + (1 + \gamma) \sum_{j=1}^{t-1} \xi_{t-j} + \xi_t \{ \text{Υποθέτω ότι } \sum_{i=a}^b () = 0 \}$$

Απόδειξη της σχέσης (30)

Χρησιμοποιώντας την (29) λαμβάνεται ότι:

$$\text{Var}(q_t^{(R)}) = \text{Var}\{ \mu + (1 + \gamma) \sum_{j=1}^{t-1} \xi_{t-j} + \xi_t \} = (t - 1)(1 + \gamma)^2 \sigma_\xi^2 + \sigma_\xi^2 = \sigma_\xi^2 \{ (t - 1)(1 + \gamma)^2 + 1 \},$$

$$\text{όπου } \sigma_\xi^2 = \{1 + L_R(1 + \theta)\}^2 \sigma_\varepsilon^2 \text{ και } \gamma = \beta - 1 = \frac{\theta - L_R(1 + \theta)}{1 + L_R(1 + \theta)}, \text{ άρα}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(q_t^{(R)}) &= \{1 + L_R(1 + \theta)\}^2 \sigma_\varepsilon^2 \{ (t - 1)(1 + \frac{\theta - L_R(1 + \theta)}{1 + L_R(1 + \theta)})^2 + 1 \} = \{1 + L_R(1 + \theta)\}^2 \sigma_\varepsilon^2 \{ (t - \\ &1)(\frac{1 + \theta}{1 + L_R(1 + \theta)})^2 + 1 \} = \sigma_\varepsilon^2 \{ (t - 1)(1 + \theta)^2 + \{1 + L_R(1 + \theta)\}^2 \} \end{aligned}$$

Απόδειξη της σχέσης (31)

Χρησιμοποιώντας την (1) επαναληπτικά λαμβάνεται ότι :

$$d_t = d_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow$$

$$d_t = d_{t-2} + \theta \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = d_{t-2} + \theta(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow$$

$$d_t = d_{t-3} + \theta \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-2} + \theta(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = d_{t-3} + \theta(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-3}) + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow$$

$$d_t = d_{t-4} + \theta \varepsilon_{t-4} + \varepsilon_{t-3} + \theta(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-3}) + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = d_{t-4} + \theta(\varepsilon_{t-4} + \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow$$

$$\dots = \dots \Leftrightarrow$$

$$d_t = d_{t-(t-1)} + \theta(\varepsilon_{t-(t-1)} + \varepsilon_{t-(t-2)} + \varepsilon_{t-(t-3)} + \dots + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + (\varepsilon_{t-(t-1)+1} + \varepsilon_{t-(t-1)+2} + \varepsilon_{t-(t-1)+3} + \dots + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \Leftrightarrow$$

$$d_t = d_1 + \theta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \Leftrightarrow$$

$$d_t = \mu + \varepsilon_1 + \theta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \Leftrightarrow$$

$$d_t = \mu + \varepsilon_t + \theta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) \Leftrightarrow$$

$$d_t = \mu + \varepsilon_t + (1 + \theta)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) \Leftrightarrow$$

$$d_t = \mu + (1 + \theta) \sum_{j=1}^{t-1} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad \{\text{Υποθέτω ότι } \sum_{i=a}^b (\cdot) = 0\}$$

Απόδειξη της σχέσης (32)

Χρησιμοποιώντας την (30),(31) λαμβάνεται ότι:

$$BW_t^{(R)} = \frac{\text{Var}(q_t^{(R)})}{\text{Var}(d_t)} = \frac{\sigma_\xi^2 \{(t-1)(1+\theta)^2 + \{1 + L_R(1+\theta)\}^2\}}{\sigma_\xi^2 \{(t-1)(1+\theta)^2 + 1\}} = \frac{1 + 2L_R(1+\theta) + L_R^2(1+\theta)^2 + (t-1)(1+\theta)^2}{(t-1)(1+\theta)^2 + 1} =$$

$$\frac{1 + (t-1)(1+\theta)^2}{(t-1)(1+\theta)^2 + 1} + \frac{2L_R(1+\theta) + L_R^2(1+\theta)^2}{(t-1)(1+\theta)^2 + 1} = 1 + \frac{L_R(1+\theta)\{2 + L_R(1+\theta)\}}{(t-1)(1+\theta)^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$BW_t^{(R)} = 1 + \frac{L_R(1+\theta)\{2 + L_R(1+\theta)\}}{(t-1)(1+\theta)^2 + 1}$$

Απόδειξη της σχέσης (33)

Χρησιμοποιώντας την (27) και αντικαθιστώντας την (17) λαμβάνεται ότι :

$$\begin{aligned} q_t^{(S,IS)} &= q_t^{(R)} + L_S(q_t^{(R)} + \gamma \xi_t) - L_S(q_{t-1}^{(R)} + \gamma \xi_{t-1}) = (L_S + 1)q_t^{(R)} + L_S \gamma \xi_t - L_S q_{t-1}^{(R)} - L_S \gamma \xi_{t-1} = \\ &= (L_S + 1)(q_{t-1}^{(R)} + \gamma \xi_{t-1} + \xi_t) + L_S \gamma \xi_t - L_S(q_{t-2}^{(R)} + \gamma \xi_{t-2} + \xi_{t-1}) - L_S \gamma \xi_{t-1} = L_S q_{t-1}^{(R)} + L_S \gamma \xi_{t-1} + \\ &L_S \xi_t + q_{t-1}^{(R)} + \gamma \xi_{t-1} + \xi_t + L_S \gamma \xi_t - L_S q_{t-2}^{(R)} - L_S \gamma \xi_{t-2} - L_S \xi_{t-1} - L_S \gamma \xi_{t-1} \Leftrightarrow q_t^{(S,IS)} = q_{t-1}^{(S,IS)} + (L_S \\ &+ 1 + L_S \gamma) \xi_t + (\gamma - L_S - L_S \gamma) \xi_{t-1} \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι:

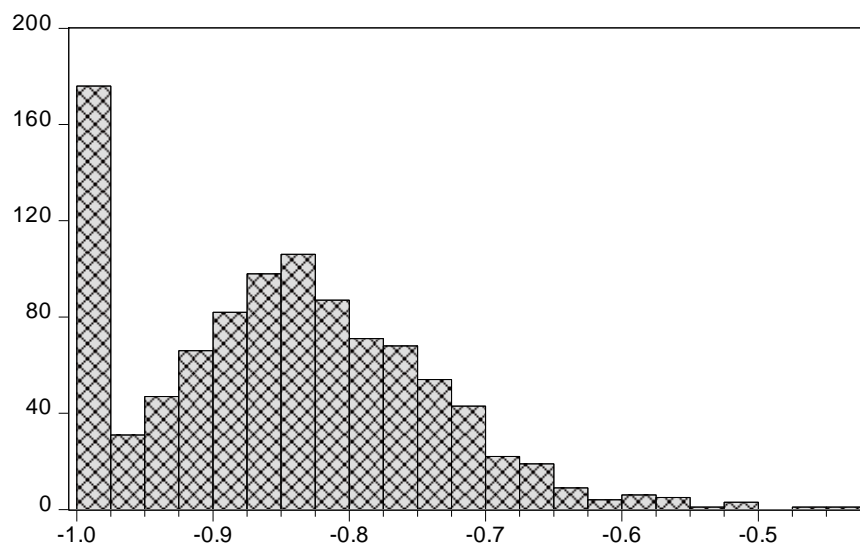
$$(L_S + 1 + L_S \gamma) \xi_t = \{1 + L_S(1 + \gamma)\} \xi_t = V_t$$

Προκύπτει εύκολα ότι:

$$\begin{aligned} (\gamma - L_S - L_S \gamma) \xi_{t-1} &= (\gamma - L_S - L_S \gamma + 1 - 1) \xi_{t-1} = \{(1 + \gamma) - L_S(1 + \gamma) - 1\} \xi_{t-1} = \{(1 + \gamma) - (1 + \\ &L_S(1 + \gamma))\} \xi_{t-1} = \{1 + L_S(1 + \gamma)\} \left\{ \frac{1 + \gamma}{1 + L_S(1 + \gamma)} - 1 \right\} \xi_{t-1} = \{1 + L_S(1 + \gamma)\} \xi_{t-1} \left\{ \frac{1 + \gamma}{1 + L_S(1 + \gamma)} - 1 \right\} = \\ &V_{t-1}(\delta - 1), \text{ όπου } \delta = \frac{1 + \gamma}{1 + L_S(1 + \gamma)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } q_t^{(S,IS)} &= q_{t-1}^{(S,IS)} + (L_S + 1 + L_S \gamma) \xi_t + (\gamma - L_S - L_S \gamma) \xi_{t-1} = q_{t-1}^{(S,IS)} + V_t + (\delta - 1)V_{t-1} \Leftrightarrow q_t^{(S,IS)} \\ &= q_{t-1}^{(S,IS)} + (\delta - 1)V_{t-1} + V_t \text{ ή } q_t^{(S,IS)} = q_{t-1}^{(S,IS)} + \varepsilon V_{t-1} + V_t, \text{ όπου } \varepsilon = \delta - 1 = \frac{\gamma - L_S(1 + \gamma)}{1 + L_S(1 + \gamma)}, V_t = \{1 + \\ &L_S(1 + \gamma)\} \xi_t, \sigma_V^2 = \{1 + L_S(1 + \gamma)\}^2 \sigma_\xi^2. \end{aligned}$$

Έλεγχος κανονικότητας του $\hat{\gamma}$ για $n=50$

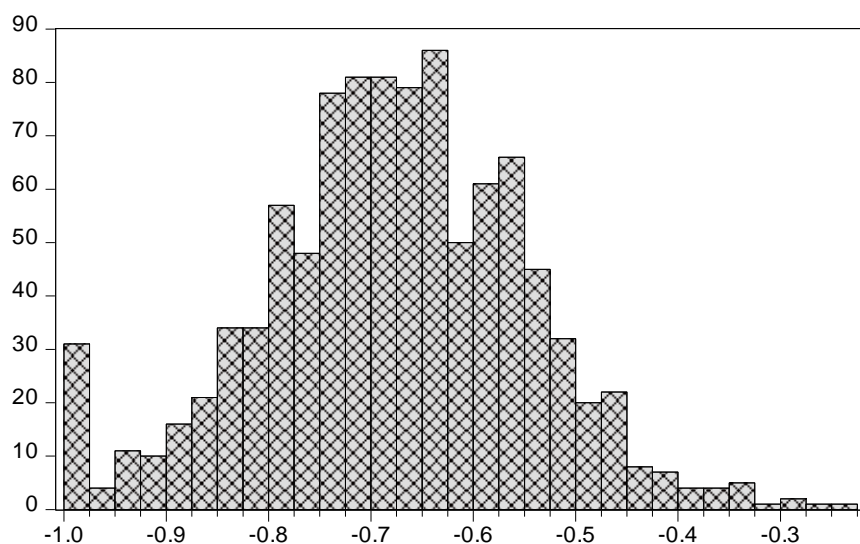


Sample 1 1000
Observations 1000

Mean -0.850250
Median -0.849881
Maximum -0.442959
Minimum -1.000000
Std. Dev. 0.104475
Skewness 0.372755
Kurtosis 2.943329

Jarque-Bera 23.29149
Probability 0.000009

Σχήμα 4 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.8502$

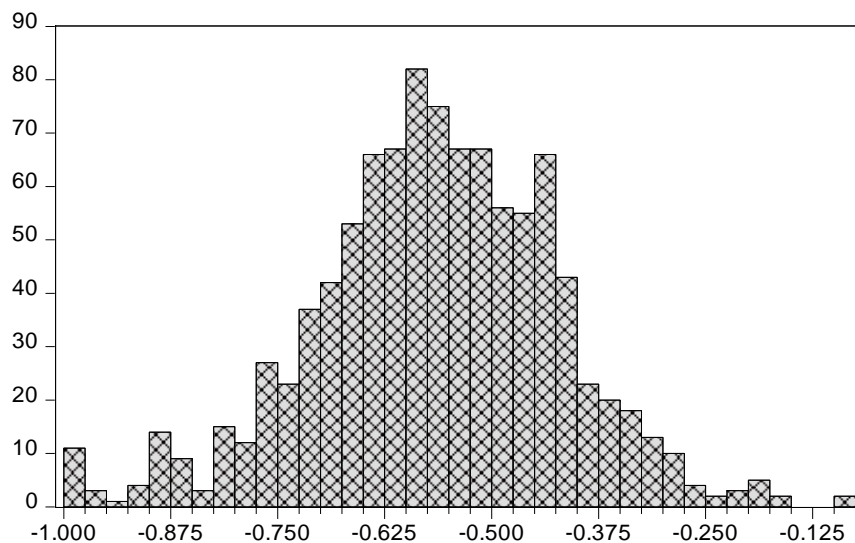


Sample 1 1000
Observations 1000

Mean -0.678789
Median -0.677113
Maximum -0.232888
Minimum -0.999999
Std. Dev. 0.131680
Skewness -0.096969
Kurtosis 3.285613

Jarque-Bera 4.966115
Probability 0.083488

Σχήμα 5 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.6788$

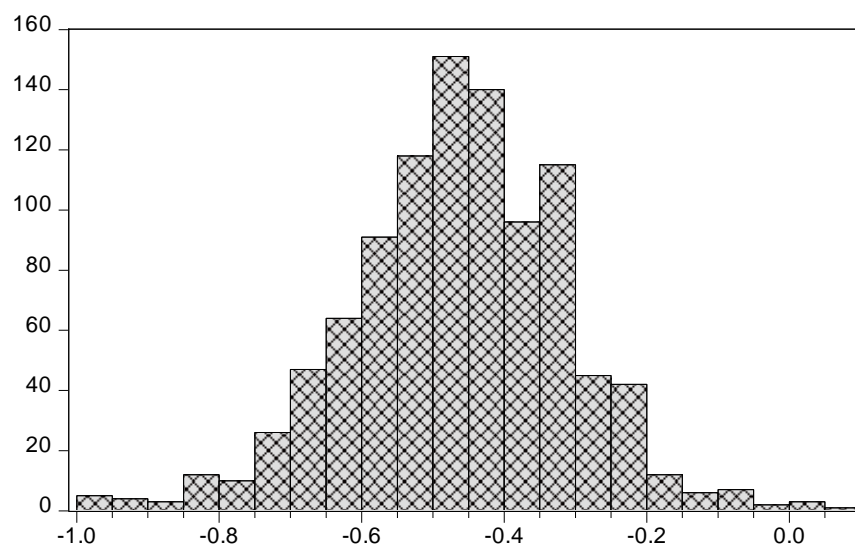


Sample 1 1000
Observations 1000

Mean -0.566806
Median -0.564757
Maximum -0.088193
Minimum -0.999999
Std. Dev. 0.145406
Skewness -0.230478
Kurtosis 3.544996

Jarque-Bera 21.22924
Probability 0.000025

Σχήμα 6 : Ιστογράμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.5668$

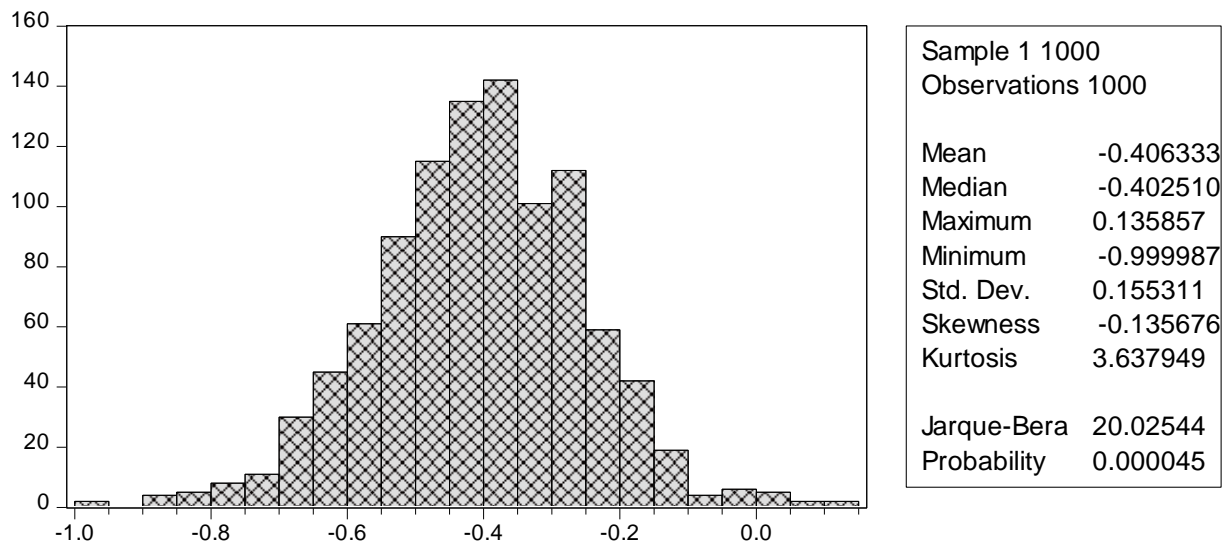


Sample 1 1000
Observations 1000

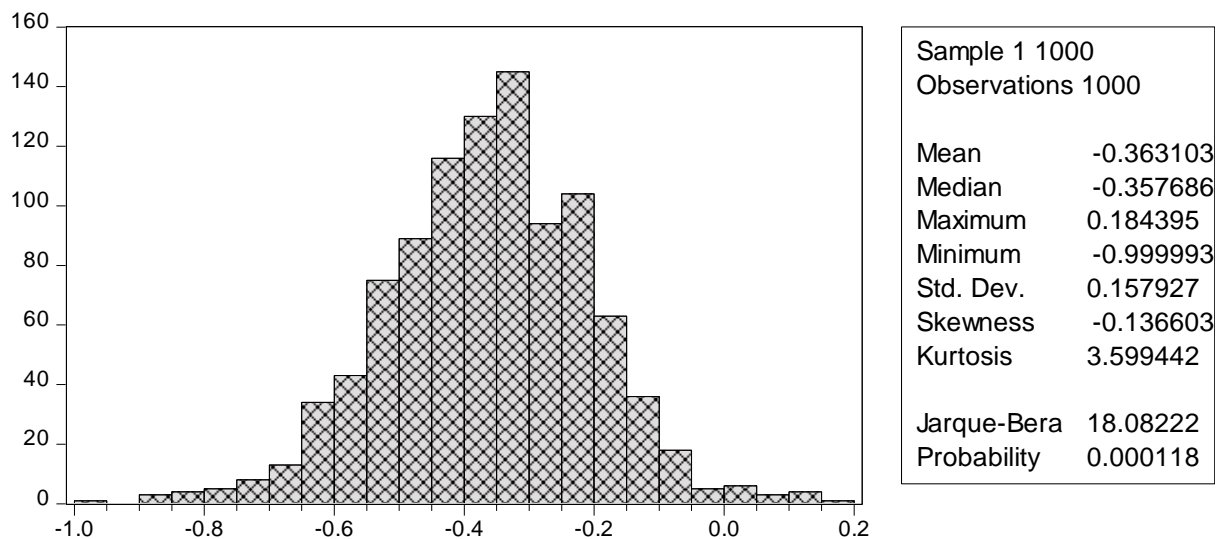
Mean -0.463209
Median -0.458181
Maximum 0.054621
Minimum -0.999997
Std. Dev. 0.153814
Skewness -0.192641
Kurtosis 3.756891

Jarque-Bera 30.05520
Probability 0.000000

Σχήμα 7 : Ιστογράμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.4632$

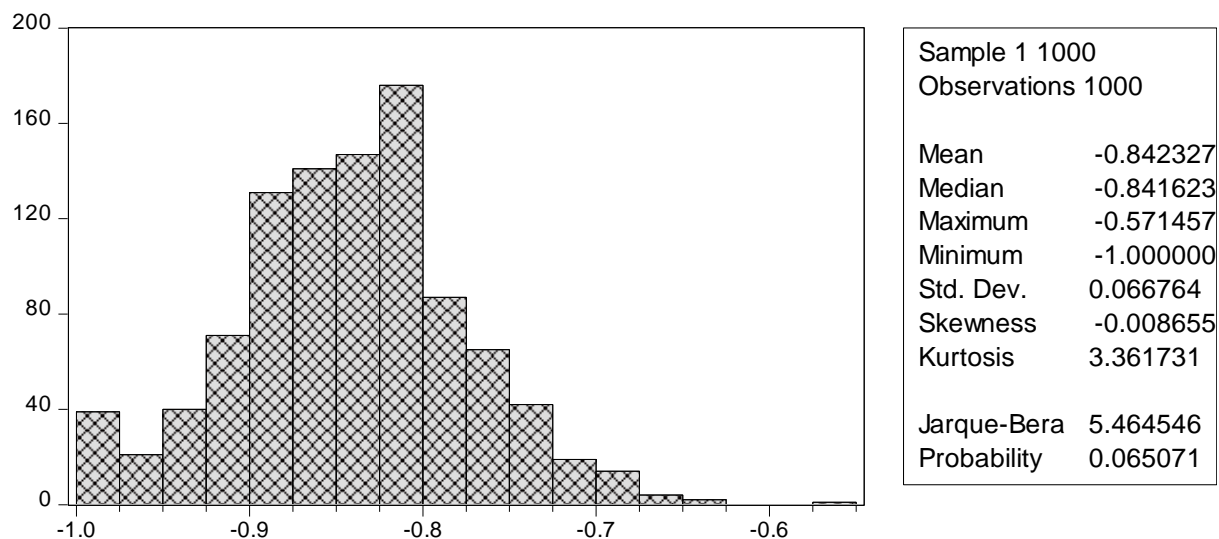


Σχήμα 8 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.4063$

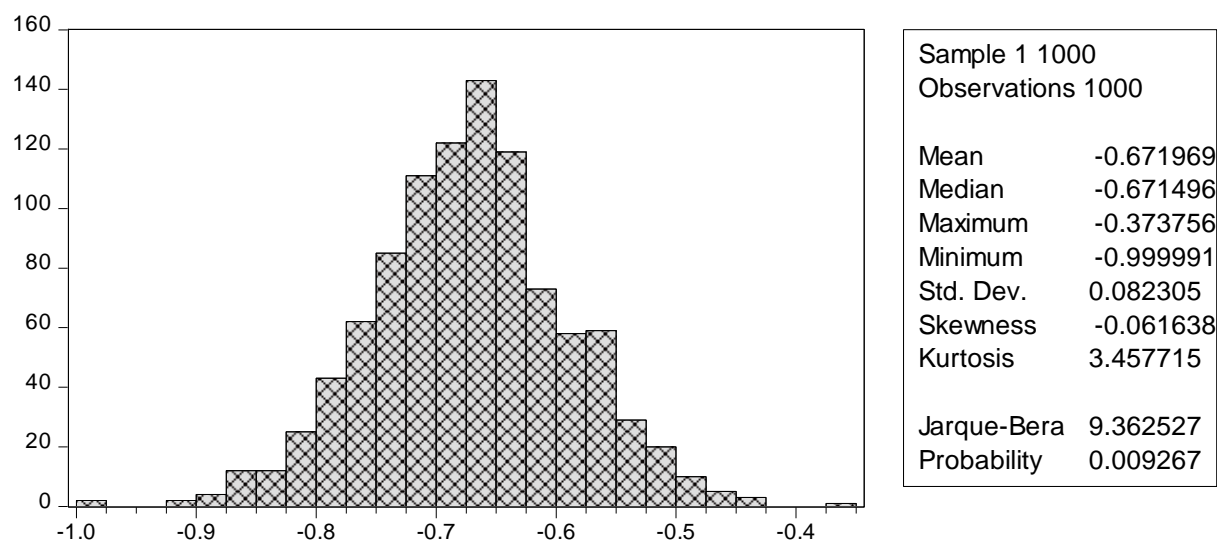


Σχήμα 9 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.3631$

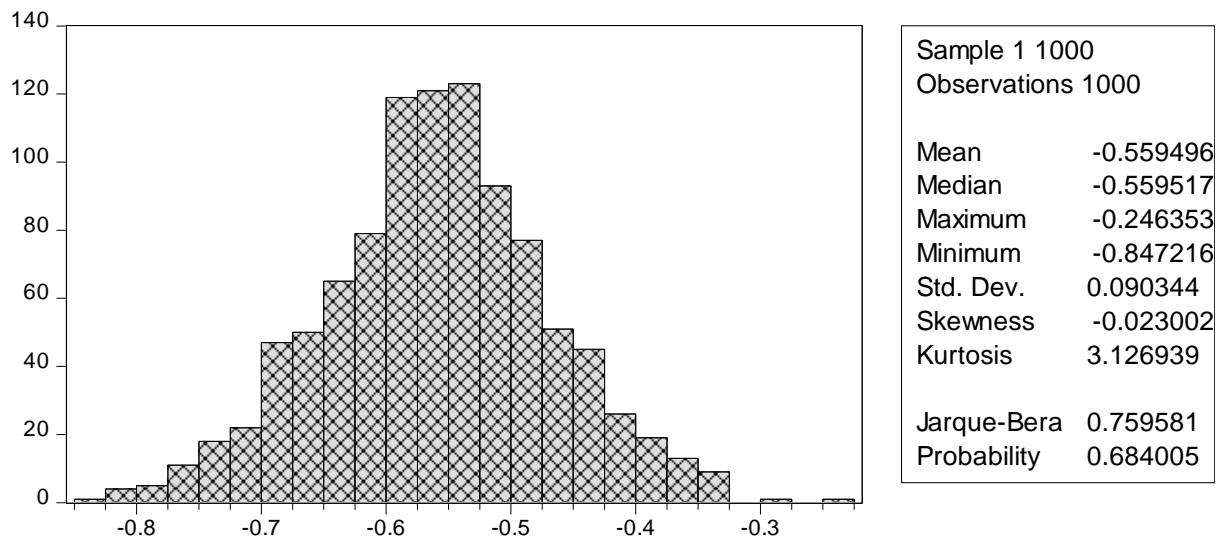
Έλεγχος κανονικότητας του $\hat{\gamma}$ για $n=100$



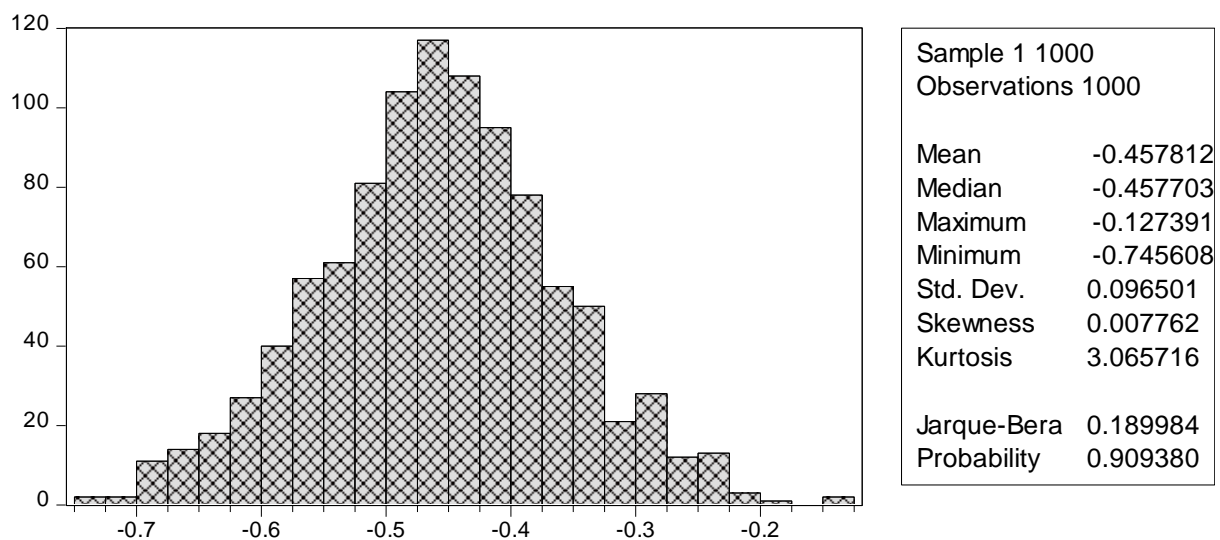
Σχήμα 10 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.8423$



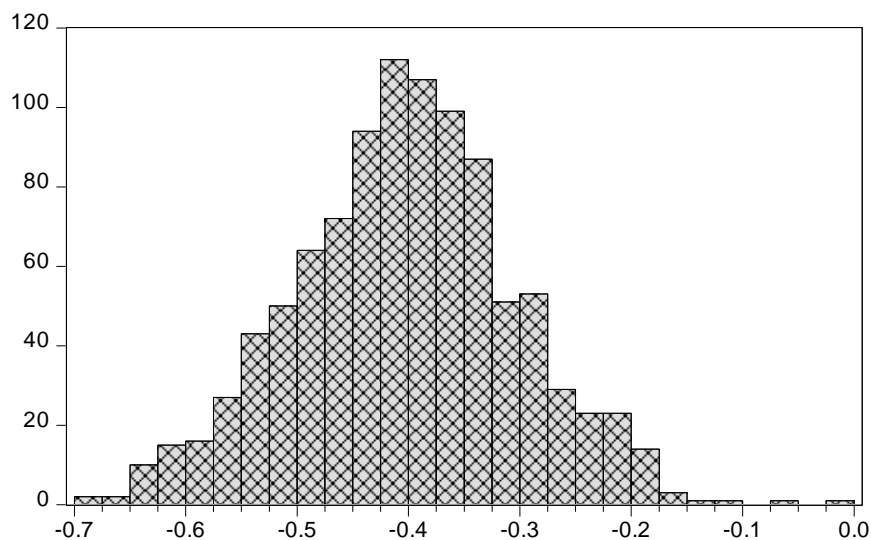
Σχήμα 11 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.672$



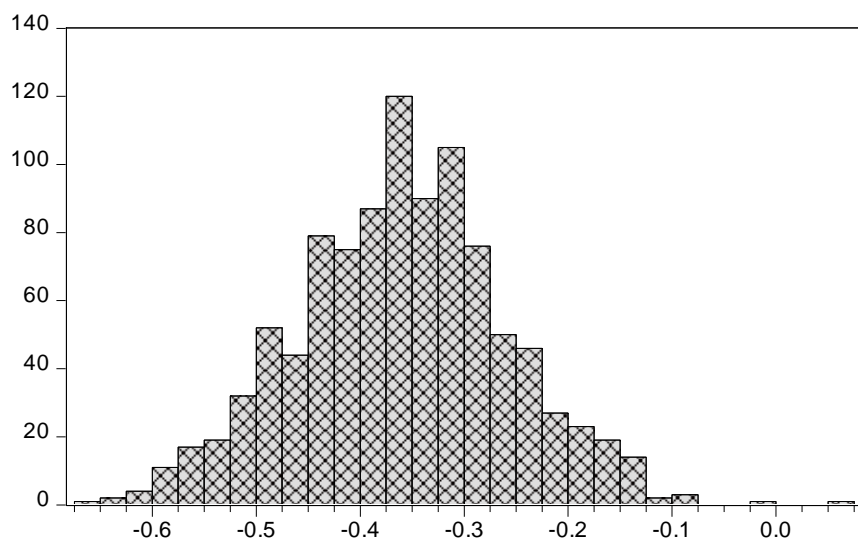
Σχήμα 12 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.5595$



Σχήμα 13 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.4578$

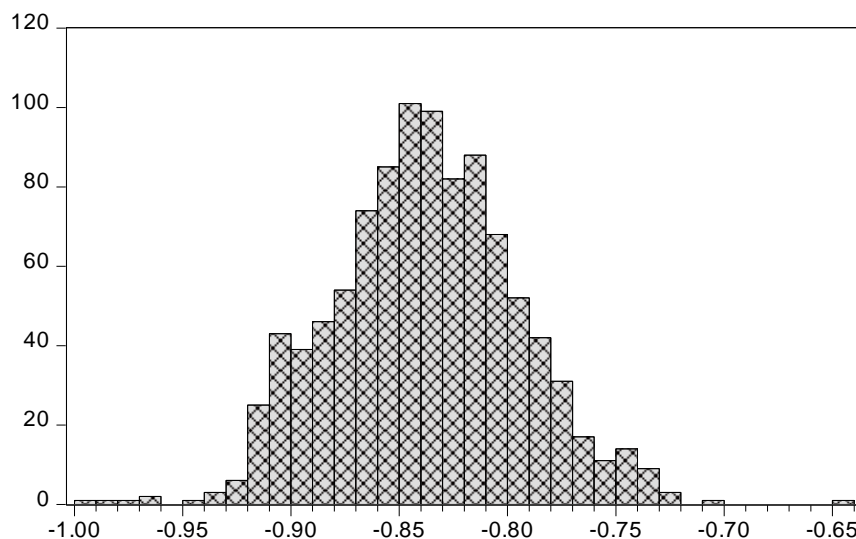


Σχήμα 14 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.403$



Σχήμα 15 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.36$

Έλεγχος κανονικότητας του $\hat{\gamma}$ για $n=200$

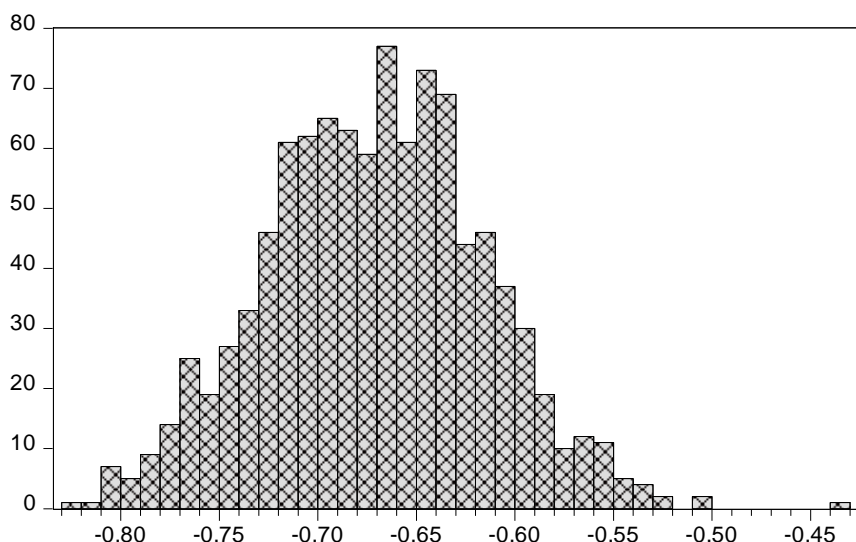


Sample 1 1000
Observations 1000

Mean -0.837872
Median -0.838472
Maximum -0.643142
Minimum -0.999999
Std. Dev. 0.043168
Skewness 0.077353
Kurtosis 3.397960

Jarque-Bera 7.596098
Probability 0.022414

Σχήμα 16 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.8379$

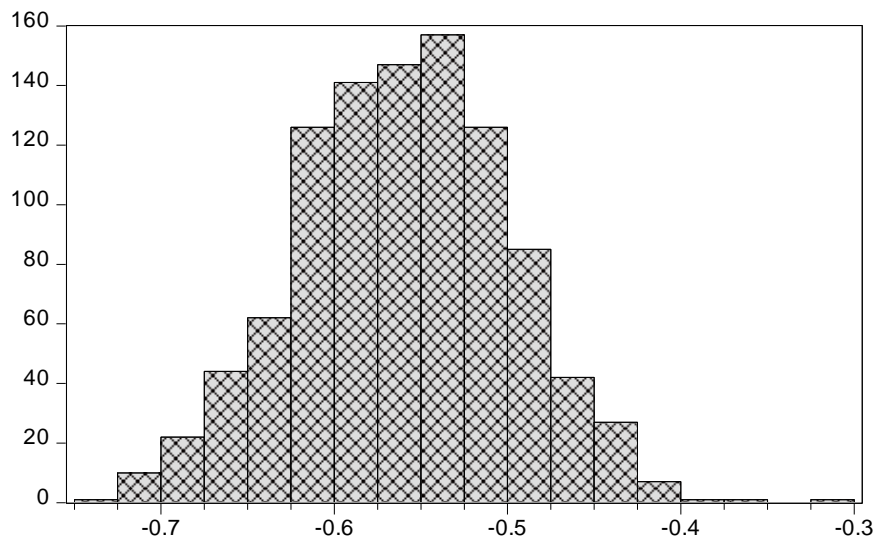


Sample 1 1000
Observations 1000

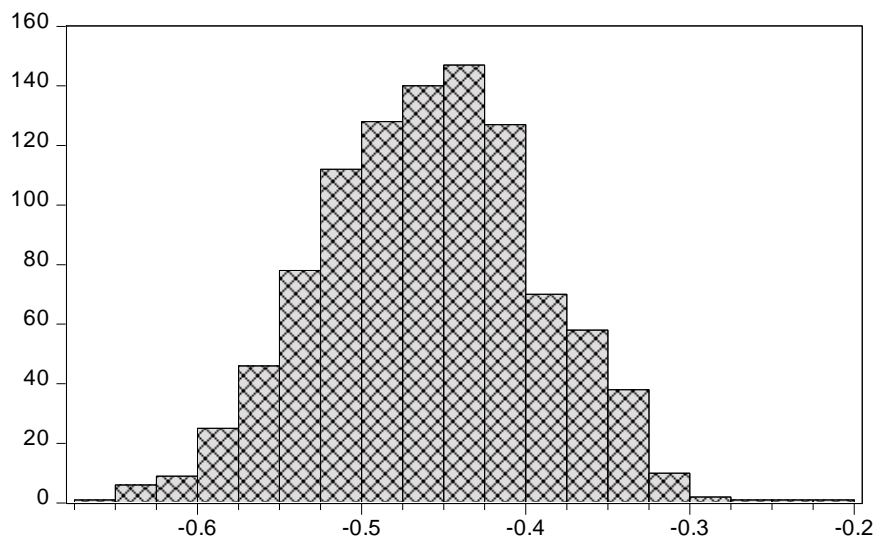
Mean -0.671009
Median -0.669496
Maximum -0.434174
Minimum -0.822722
Std. Dev. 0.055313
Skewness 0.066503
Kurtosis 3.014131

Jarque-Bera 0.745433
Probability 0.688860

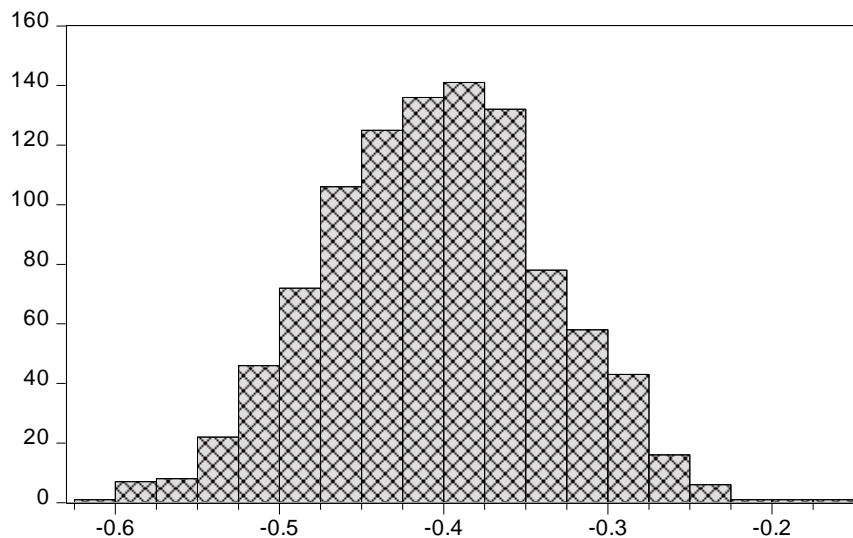
Σχήμα 17 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.671$



Σχήμα 18 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.5598$

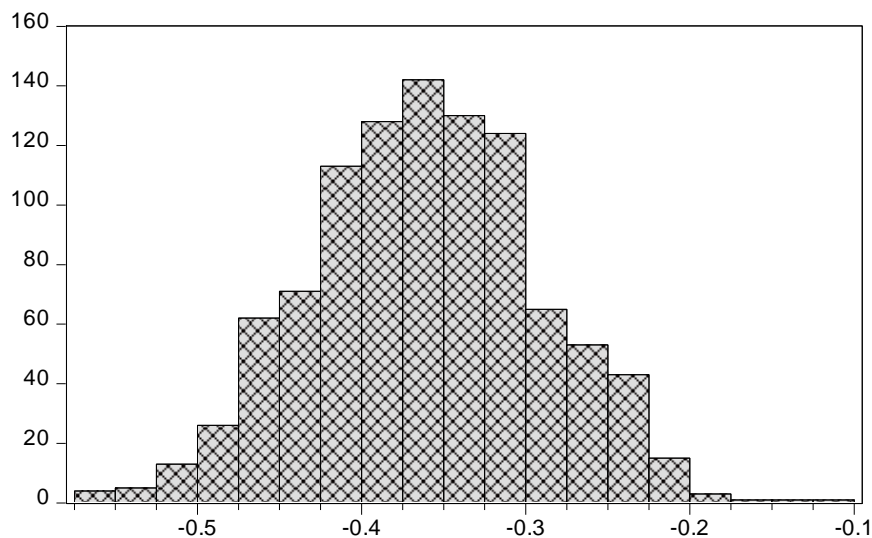


Σχήμα 19 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.4589$



Sample 1 1000 Observations 1000	
Mean	-0.404366
Median	-0.403896
Maximum	-0.158179
Minimum	-0.609891
Std. Dev.	0.068414
Skewness	0.006027
Kurtosis	2.906446
Jarque-Bera	0.370733
Probability	0.830800

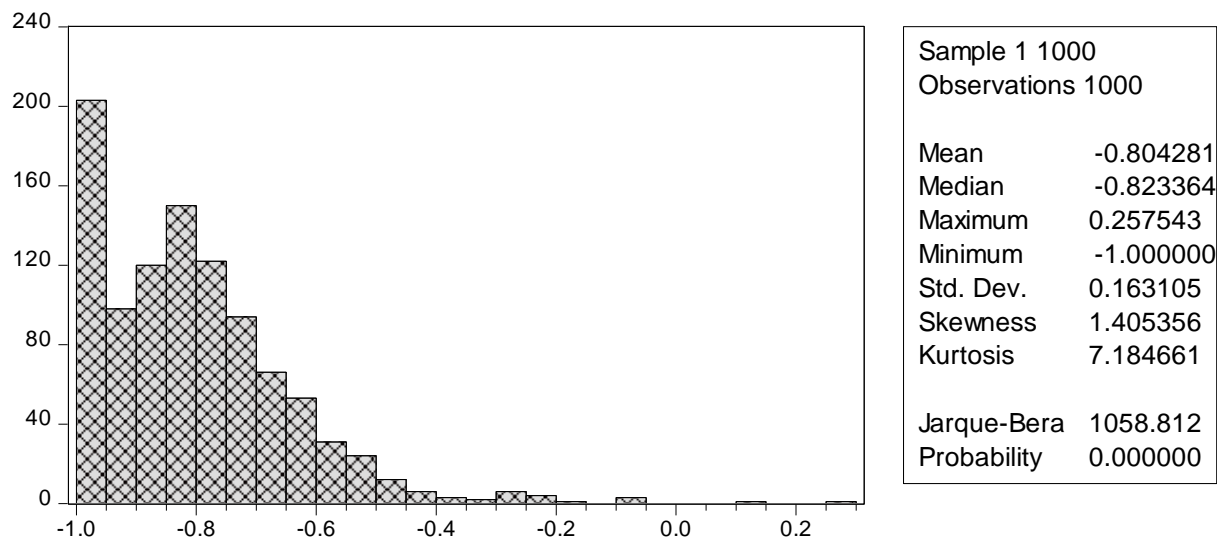
Σχήμα 20 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.4044$



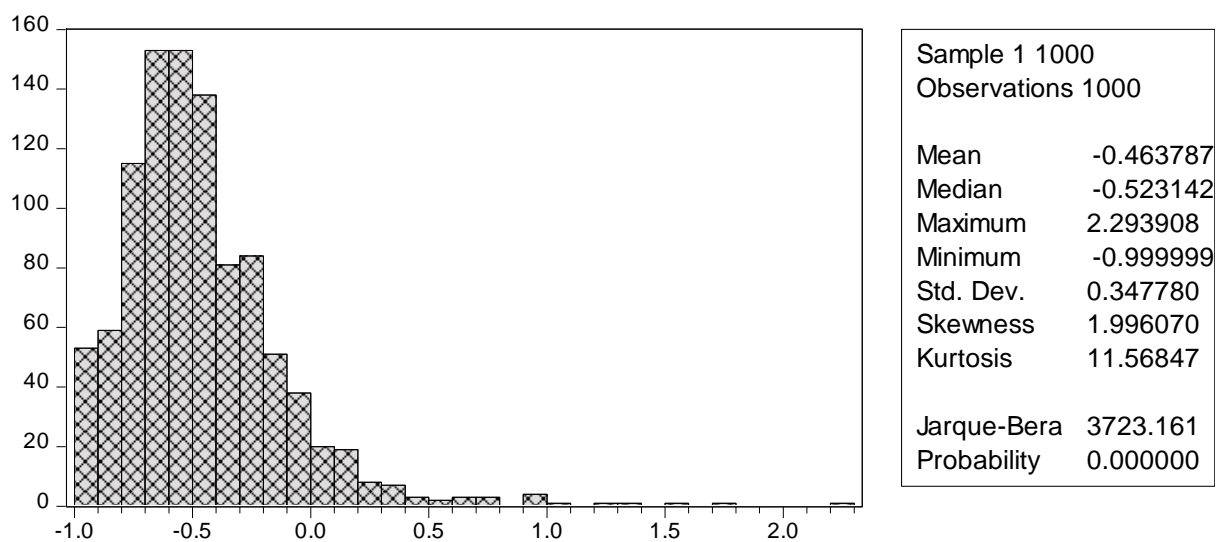
Sample 1 1000 Observations 1000	
Mean	-0.361527
Median	-0.361491
Maximum	-0.117785
Minimum	-0.573880
Std. Dev.	0.069788
Skewness	0.003522
Kurtosis	2.916696
Jarque-Bera	0.291213
Probability	0.864498

Σχήμα 21 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων γ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\gamma = -0.3615$

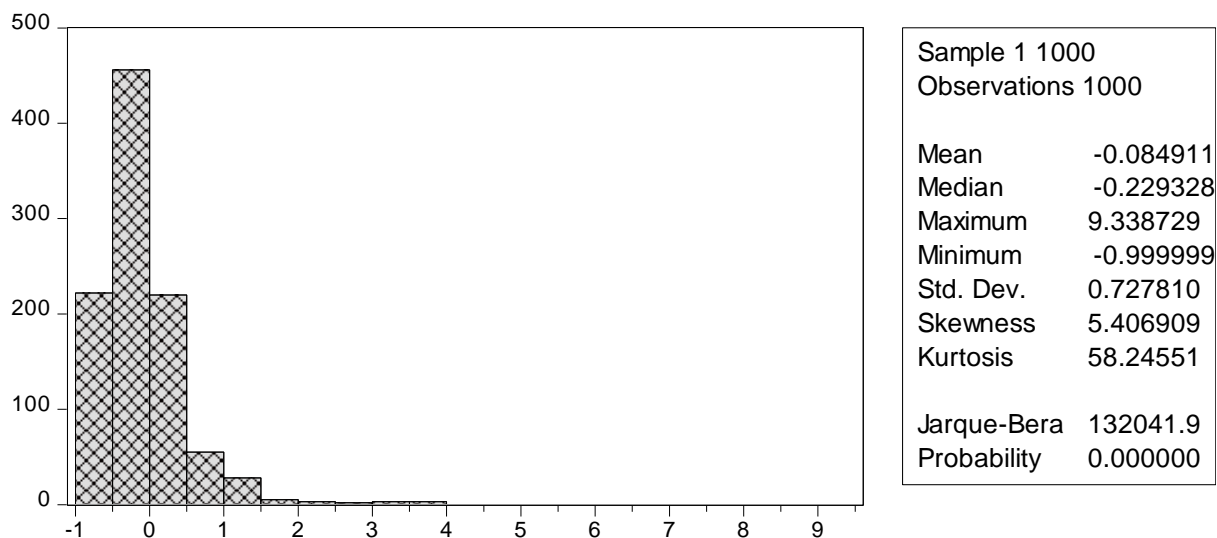
Έλεγχος κανονικότητας του $\hat{\theta}$ για $n=50$



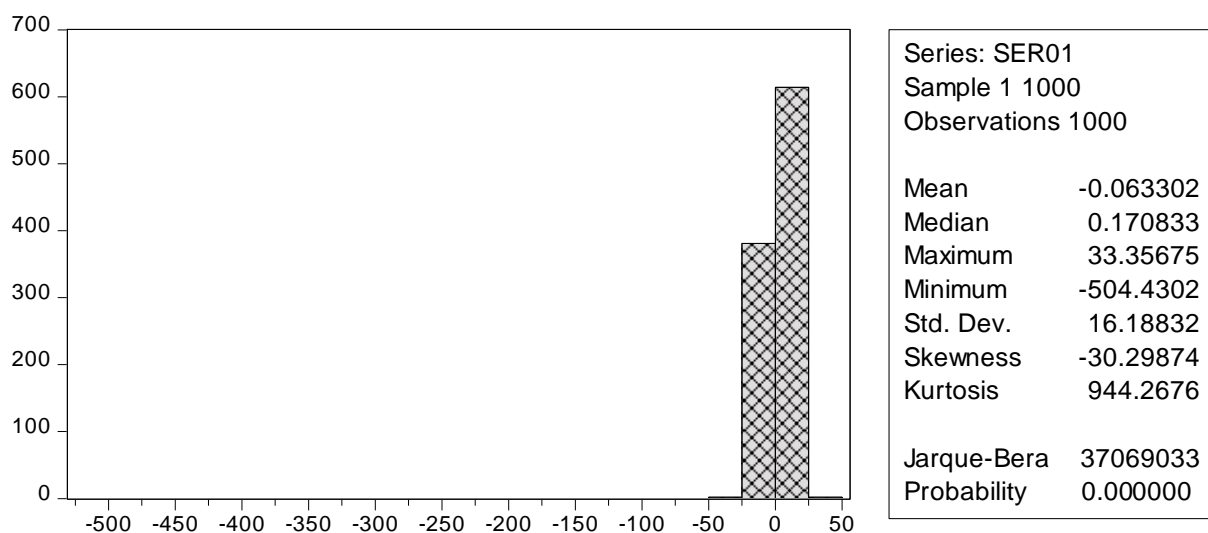
Σχήμα 22 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = -0.8043$



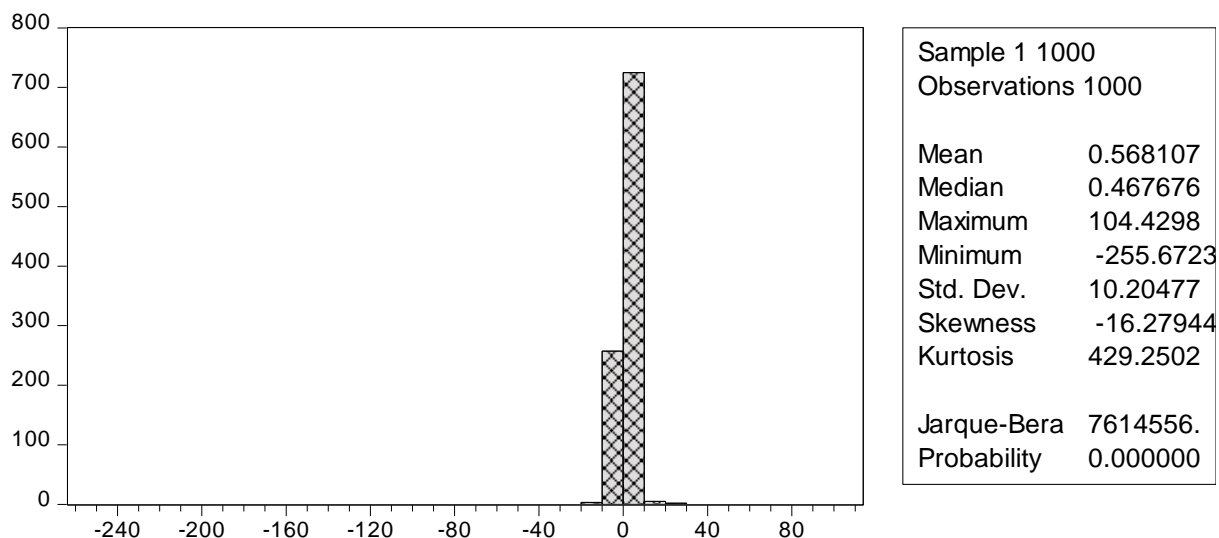
Σχήμα 23 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = -0.4638$



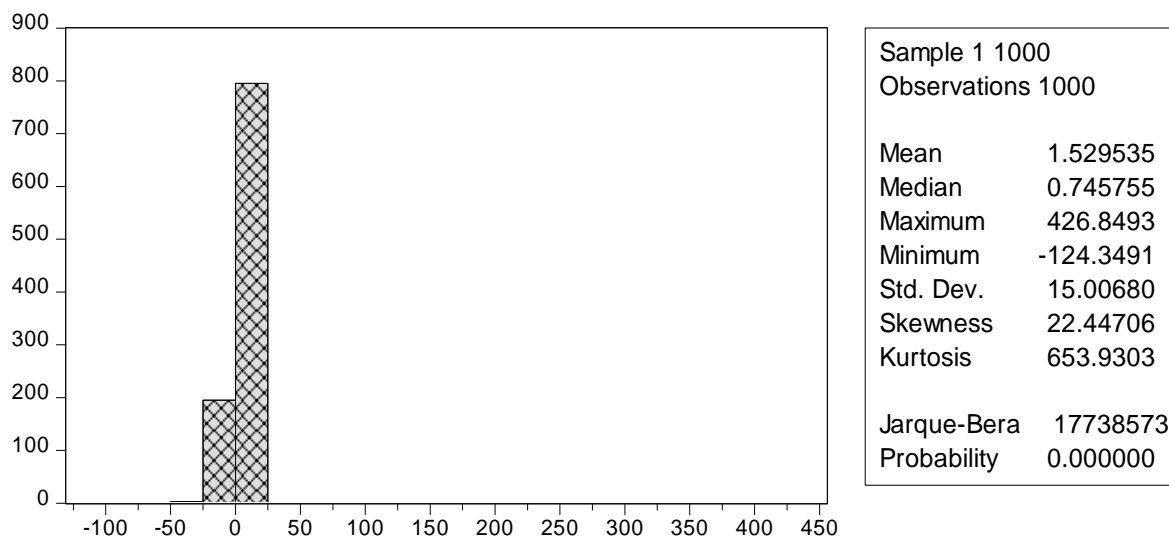
Σχήμα 24 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = -0.085$



Σχήμα 25 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = -0.0633$

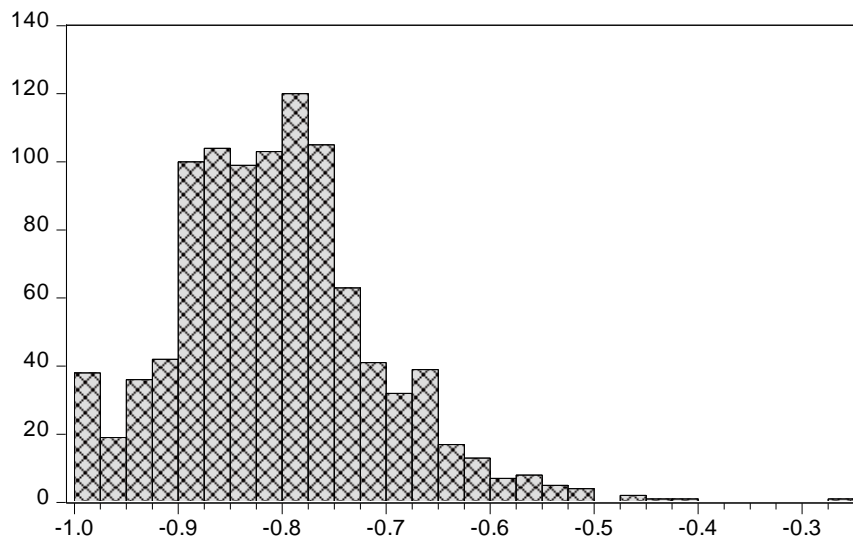


Σχήμα 26 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = -0.5681$



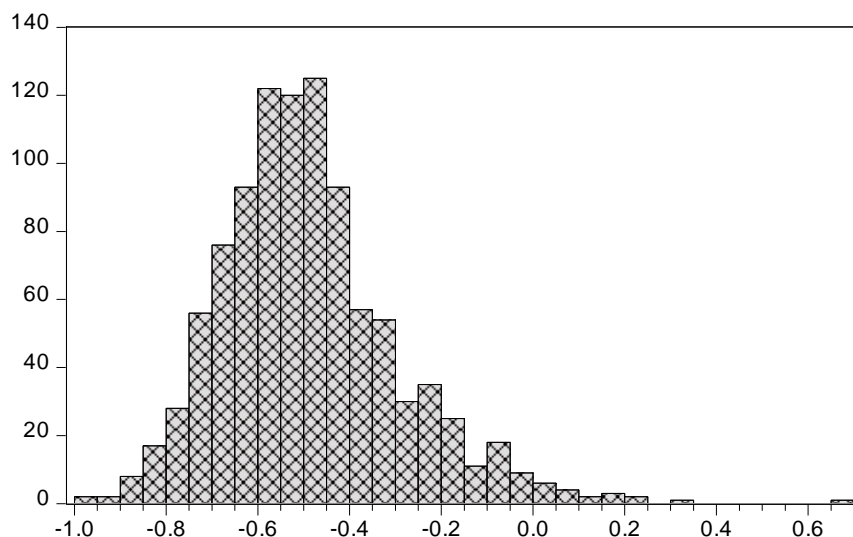
Σχήμα 27 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = 1.5295$

Έλεγχος κανονικότητας του $\hat{\theta}$ για $n=100$



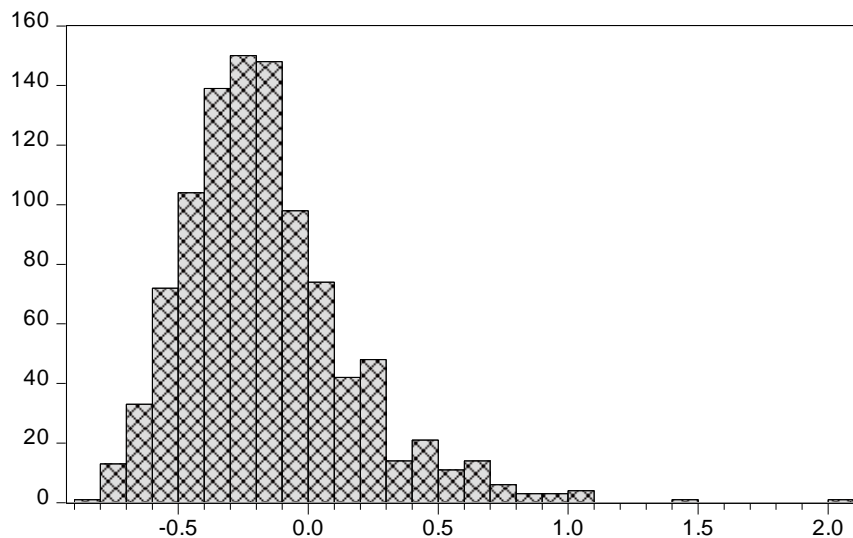
Sample 1 1000 Observations 1000	
Mean	-0.805200
Median	-0.811819
Maximum	-0.250086
Minimum	-1.000000
Std. Dev.	0.096944
Skewness	0.623440
Kurtosis	4.489587
Jarque-Bera	157.2324
Probability	0.000000

Σχήμα 28 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = -0.8052$



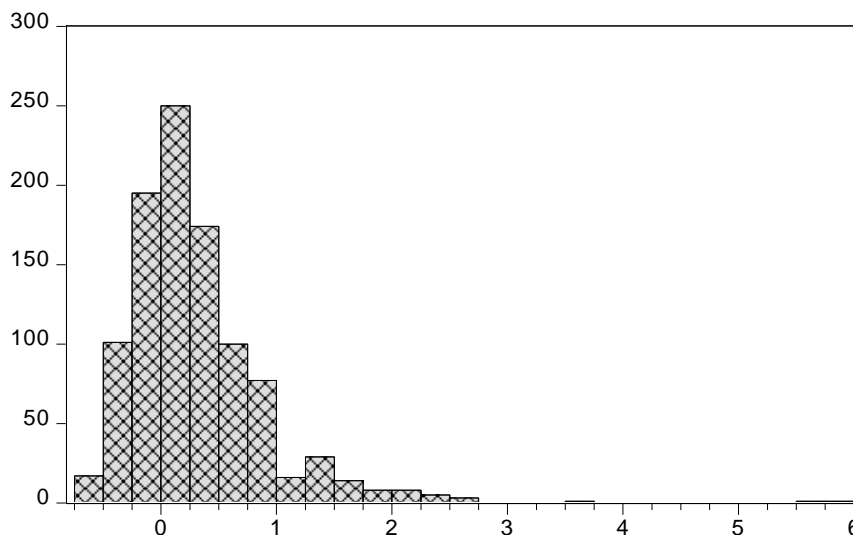
Sample 1 1000 Observations 1000	
Mean	-0.488489
Median	-0.510787
Maximum	0.675543
Minimum	-0.999991
Std. Dev.	0.194623
Skewness	0.905777
Kurtosis	4.973479
Jarque-Bera	299.0146
Probability	0.000000

Σχήμα 29 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = -0.4885$



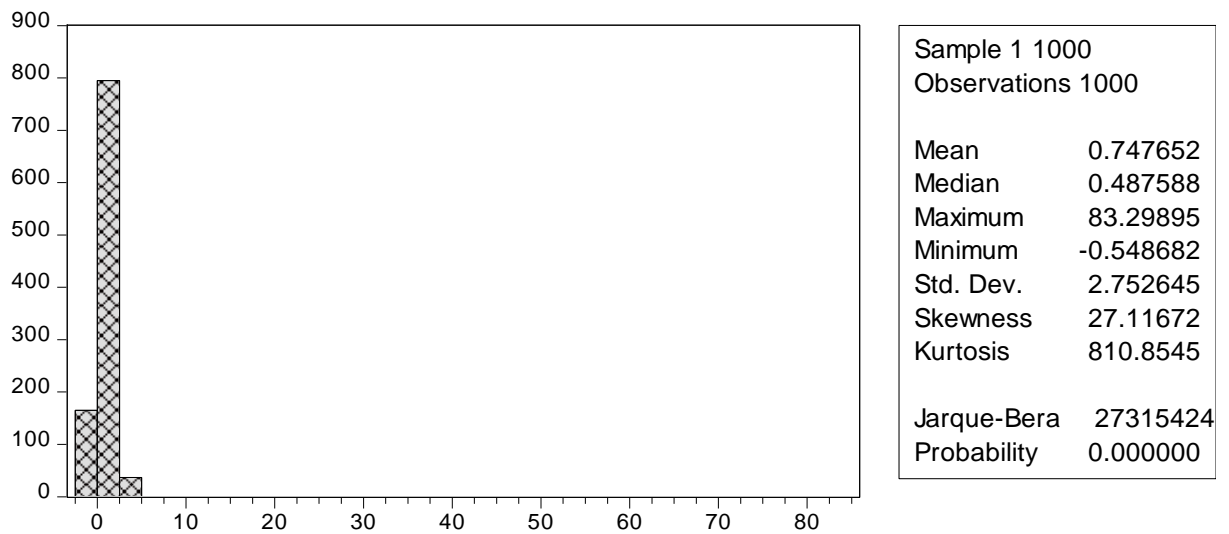
Sample 1 1000 Observations 1000	
Mean	-0.161942
Median	-0.212744
Maximum	2.059212
Minimum	-0.819663
Std. Dev.	0.325615
Skewness	1.258602
Kurtosis	6.377881
Jarque-Bera	739.4332
Probability	0.000000

Σχήμα 30 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = -0.1619$

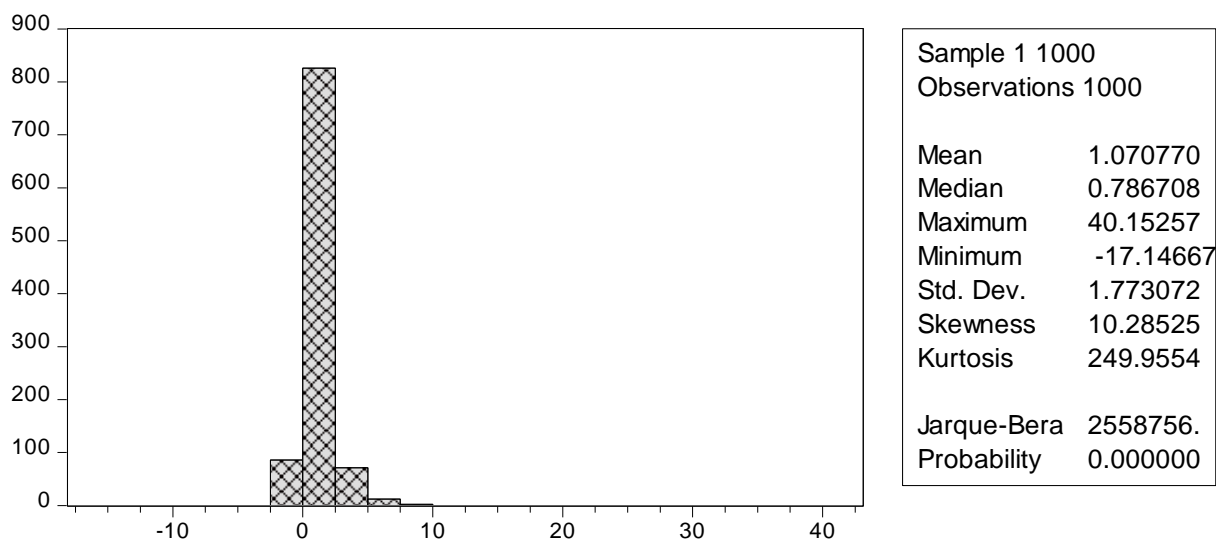


Sample 1 1000 Observations 1000	
Mean	0.299784
Median	0.184822
Maximum	5.849833
Minimum	-0.658812
Std. Dev.	0.597014
Skewness	2.535335
Kurtosis	17.76224
Jarque-Bera	10151.48
Probability	0.000000

Σχήμα 31 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = 0.2998$

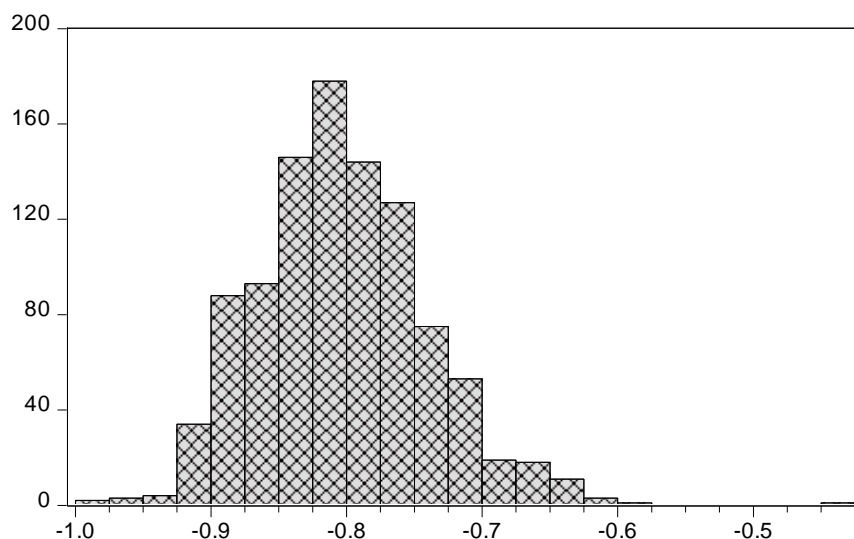


Σχήμα 32 : Ιστογράμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = 0.7476$



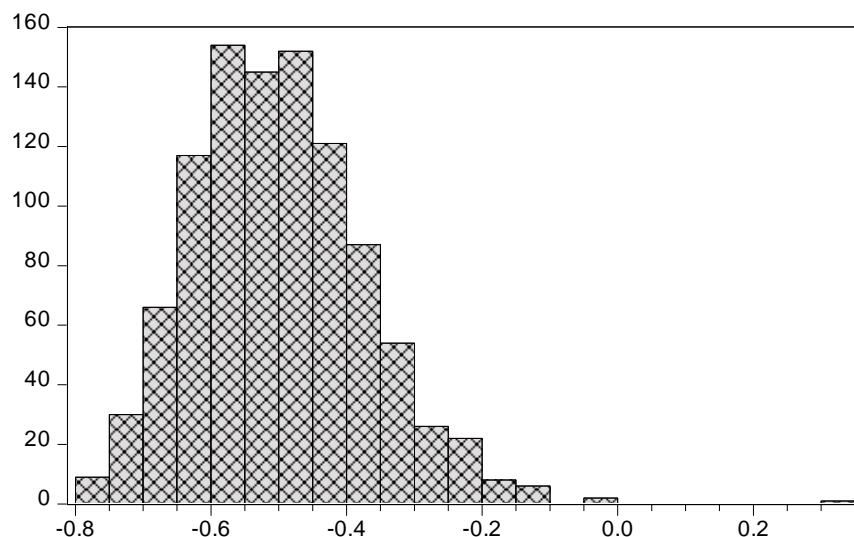
Σχήμα 33 : Ιστογράμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = 1.0708$

Έλεγχος κανονικότητας του $\hat{\theta}$ για $n=200$



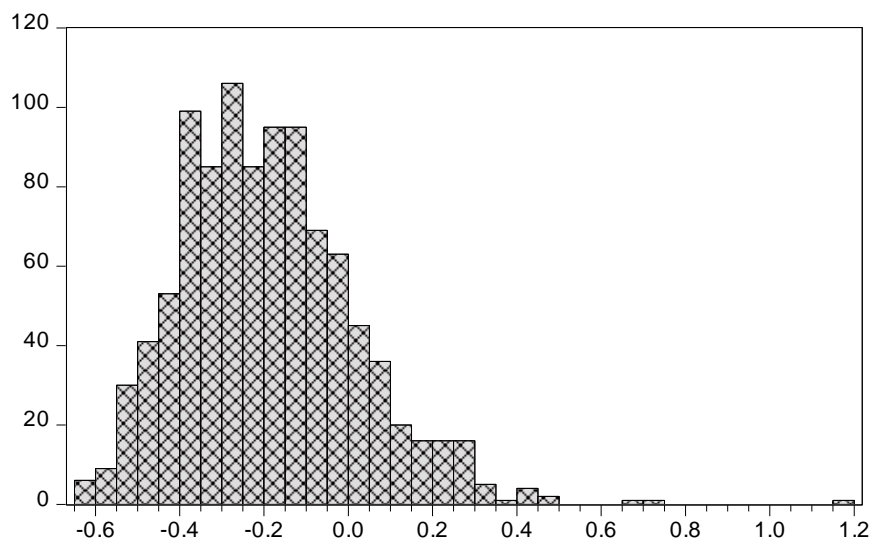
Sample 1 1000 Observations 1000	
Mean	-0.803293
Median	-0.807354
Maximum	-0.445133
Minimum	-0.999999
Std. Dev.	0.062524
Skewness	0.474136
Kurtosis	4.060245
Jarque-Bera	84.30574
Probability	0.000000

Σχήμα 34 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = -0.8033$

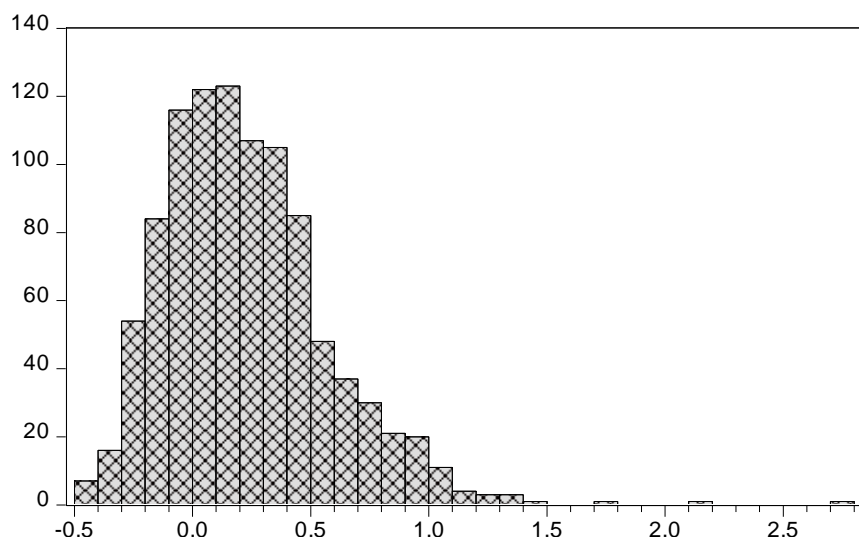


Sample 1 1000 Observations 1000	
Mean	-0.499309
Median	-0.506338
Maximum	0.303224
Minimum	-0.784523
Std. Dev.	0.127309
Skewness	0.666304
Kurtosis	4.545618
Jarque-Bera	173.5326
Probability	0.000000

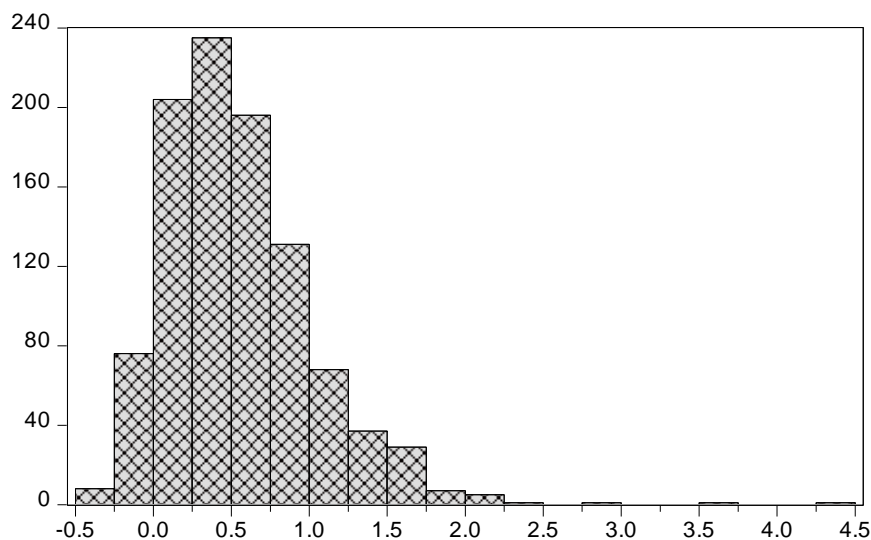
Σχήμα 35 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = -0.4993$



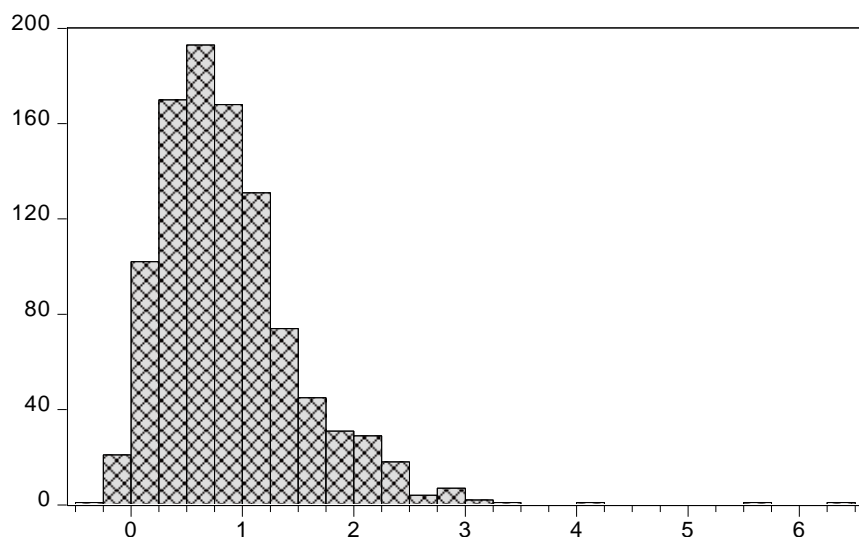
Σχήμα 36 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = -0.1912$



Σχήμα 37 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = 0.228$



Σχήμα 38 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = 0.5509$



Σχήμα 39 : Ιστόγραμμα των Εκτιμημένων θ – Μέση Εκτιμημένη Τιμή $\theta = 0.8834$